

P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematik**, der **Naturwissenschaften** und **Technik** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes, durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter dieser Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir

des … nselben
Geg … nen sein.
… sonders
auf … Leipzig,
Mü … tischen
Wi … tik und
Alg … sik, die
Ge … n einem
Sch … d. Eine
fra … rgt, hat
zu …
… d natur-
wis … Mathe-
ma … hrift für
Ge … Mathe-
ma … natiker-
Ve … Organ für
an … ien und
na … -natur-
wi … wissen-
sc … phische
Ze … Biologie,
fe … Monats-
sc …
… gsbuch-
ha … einenden
„M … mir ver-
br … ksamkeit
sc … von den
vc … rch aus-
fü … Die Mit-
te … elmäßig

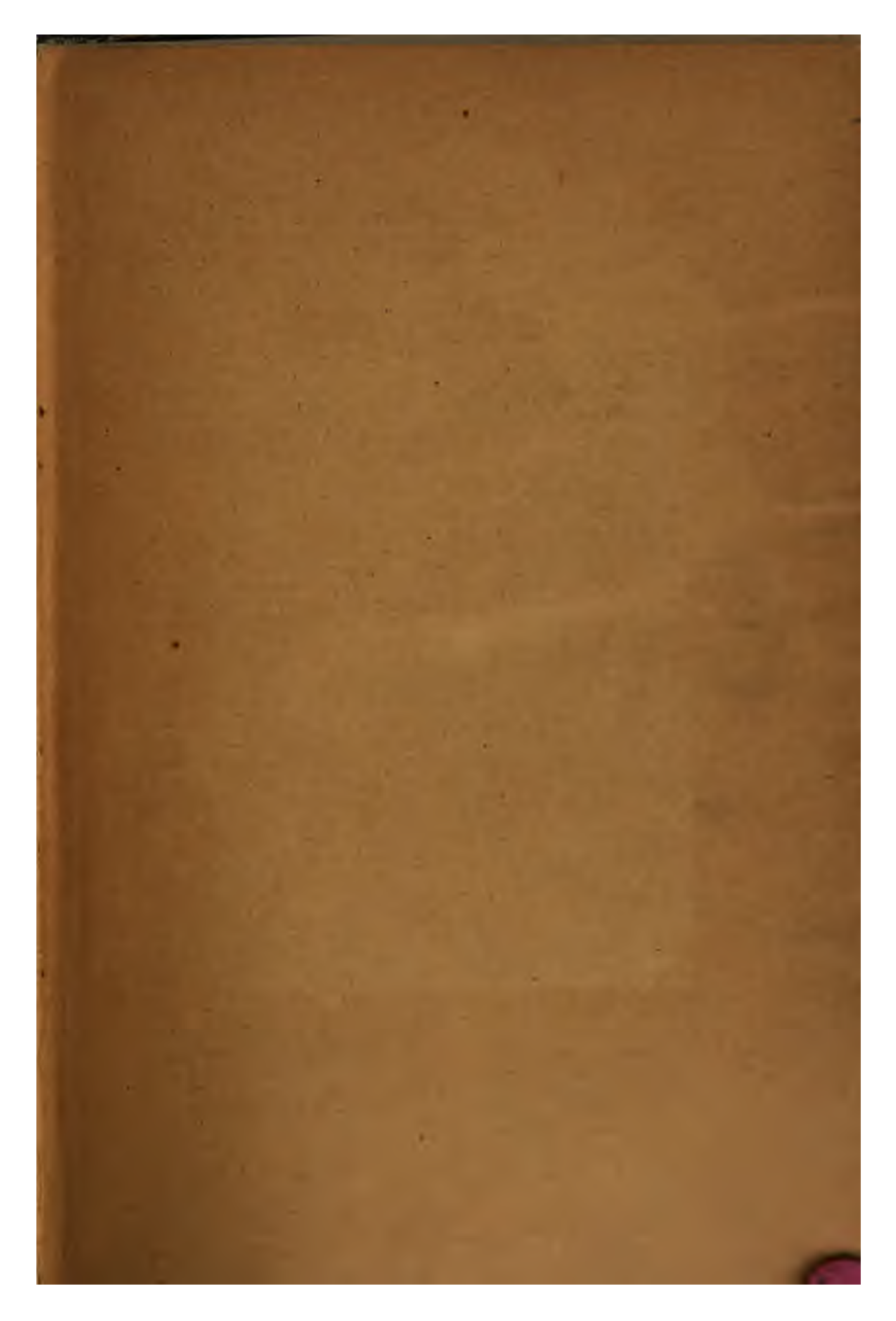
bei Erscheinen umsonst und postfrei von mir übersandt. Das ausführliche **„Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften, Technik nebst Grenzwissenschaften“** 101. Ausgabe, mit eingehender systematischer und alphabetischer Bibliographie und einem Gedenktagebuch für Mathematiker, 10 Bildnissen sowie einem Anhange, Unterhaltungsliteratur enthaltend [CXXXI, 392 u. 92 S.] gr. 8. 1908, steht Interessenten umsonst und postfrei zur Verfügung.

L[illegible]

B. G. Teubner.



M. V.



THEORIE DER ELEKTRIZITÄT

ZWEITER BAND

ELEKTROMAGNETISCHE THEORIE DER STRAHLUNG

VON

DR. M. ABRAHAM

ZWEITE AUFLAGE

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1908

ELEKTROMAGNETISCHE THEORIE DER STRAHLUNG

VON

Dr. M. ABRAHAM

ZWEITE AUFLAGE

MIT 6 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1908

Vorwort zur ersten Auflage.

Die Maxwellsche Theorie des elektromagnetischen Feldes, in welche der erste Band dieses Werkes einführt, bildet gewissermaßen das erste Stockwerk der modernen Theorie der Elektrizität. Kaum hatten die Physiker sich hier eingerichtet, als eine Fülle neuer Erscheinungen auf sie einstürmte und eine Weiterführung des Baues erheischte. Das zweite Stockwerk des Gebäudes der Elektrizitätslehre, die Elektronentheorie, nimmt diese meist als elektromagnetische Strahlung sich kundgebenden Erscheinungen auf. Auf Maxwellschen Vorstellungen bauend, betrachtet die Elektronentheorie den Raum als ein physikalisches Kontinuum, welches die elektromagnetischen Wirkungen überträgt. Ausgangsstellen und Angriffsstellen dieser Wirkungen liegen in der Elektrizität. Diese soll aus unteilbaren Elementarquanten, „Elektronen" genannt, zusammengesetzt sein. Jeder elektrische Strom wird als Konvektionsstrom bewegter Elektronen aufgefaßt. Die Kathodenstrahlen werden gedeutet als ein solcher Konvektionsstrom negativer Elektronen, die mit großer Geschwindigkeit einander parallel sich bewegen; dieser „Konvektionsstrahlung" tritt die „Wellenstrahlung" gegenüber, die durch Schwingungen eben dieser Teilchen erregt sein soll. Der Theorie beider Arten elektromagnetischer Strahlung ist der vorliegende zweite Band der „Theorie der Elektrizität" gewidmet.

Der erste Abschnitt beginnt mit der Darlegung der physikalischen und mathematischen Grundlagen der Elektronentheorie. Es werden die Tatsachen aufgeführt, welche die Annahme einer atomistischen Struktur der Elektrizität nahe legen. Aus den Grundgleichungen der Elektronentheorie wird der Begriff der „elektromagnetischen Bewegungsgröße" abgeleitet, welcher für die elektromagnetische Mechanik

überhaupt, sowohl für die Mechanik der Elektronen wie auch für die Theorie des Strahlungsdruckes von fundamentaler Bedeutung ist. Es werden ferner allgemeine Lösungen der Grundgleichungen gegeben, mit Hilfe der „elektromagnetischen Potentiale“, die als Verallgemeinerungen des skalaren Potentiales elektrostatischer Felder, bzw. des Vektorpotentiales stationärer magnetischer Felder anzusehen sind; jene Lösungen, auf welche wir weiterhin oft zurückgreifen, können auch durch einen einzigen Vektor zusammengefaßt werden, der von uns als „Hertzscher Vektor“ bezeichnet wird.

Sodann folgt im zweiten Kapitel die Theorie einer beliebig bewegten Punktladung. Das schwingende negative Elektron bildet das einfachste, durch das Zeemansche Phänomen in vielen Fällen als naturgetreu bestätigte Modell einer Lichtquelle; was die entsandte Wellenstrahlung anbelangt, kann das Elektron in den meisten Fällen durch eine Punktladung ersetzt werden. So sind denn die Entwickelungen dieses Kapitels auch für die Dynamik des Elektrons von Interesse, um so mehr, als sie unabhängig von jeder Hypothese über die Gestalt des Elektrons sind.

Um die Mechanik des Elektrons vollständig zu entwickeln, bedarf es allerdings einer besonderen Annahme über dessen Form. Ich habe an der Annahme eines starren kugelförmigen Elektrons festgehalten, die ich der rein elektromagnetischen Theorie der Kathoden- und Radiumstrahlen zugrunde gelegt hatte. Mir scheint nichts vorzuliegen, was dazu nötigen könnte, diese Grundhypothese fallen zu lassen. Immerhin habe ich auch den abweichenden Auffassungen von H. A. Lorentz in diesem Buche Rechnung getragen. Die wertvollen, aus dem Bereiche der beobachtbaren quasistationären Bewegung herausführenden Untersuchungen von P. Hertz und A. Sommerfeld, welche gleichfalls auf der Voraussetzung des starren kugelförmigen Elektrons fußen, sind in die hier gegebene Darstellung der Dynamik des Elektrons eingearbeitet worden.

Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit den elektromagnetischen Vorgängen in wägbaren Körpern. Die Hauptgleichungen der Elektrodynamik, welche die beobachtbaren elektromagnetischen Vektoren miteinander verknüpfen, ergeben sich nach H. A. Lorentz durch Mittelwertsbildung aus den für die Felder der einzelnen Elektronen

geltenden Gleichungen. Für ruhende Körper erhält man auf diese Weise die Hauptgleichungen der Maxwellschen Theorie; für bewegte Körper aber folgen die Lorentzschen Gleichungen, welche von denen der Hertzschen Elektrodynamik bewegter Körper verschieden sind, und mit der Erfahrung in besserer Übereinstimmung sich befinden. Daß die elektromagnetischen und die optischen Eigenschaften dielektrischer Körper durch die Anwesenheit von „Polarisationselektronen" befriedigend erklärt werden, wird insbesondere für die magnetische Drehung der Polarisationsebene und die Dispersion der Körper gezeigt. Die metallische Leitung wird mit P. Drude auf frei bewegliche „Leitungselektronen" zurückgeführt, die in regelloser Wärmebewegung begriffen sind.

Im zweiten Abschnitt sind auch einige Probleme behandelt worden, welche mit der atomistischen Hypothese nur lose zusammenhängen. Man findet hier Sätze abgeleitet, welche die Strahlung bestimmen, die von hochfrequenten Strömen in linearen Leitern entsandt wird; insbesondere die Anwendung dieser Sätze auf Sendeantennen ist für die drahtlose Telegraphie von Interesse. Ich bin allerdings auf diese Probleme nicht so ausführlich eingegangen, wie ich ursprünglich beabsichtigte, sondern habe mich mit der Darlegung desjenigen begnügt, was zur Beurteilung der bei der drahtlosen Telegraphie stattfindenden Vorgänge unentbehrlich ist.

Auf den Gesetzen der Lichtfortpflanzung im Raume und auf den fundamentalen Sätzen der elektromagnetischen Mechanik beruht die gegebene Lösung des Problems der Reflexion des Lichtes durch einen bewegten Spiegel. Diese Lösung ist aufs engste verknüpft mit dem thermodynamischen Gesetze der strahlenden Wärme, das von so hervorragender praktischer und theoretischer Bedeutung geworden ist. Aus der experimentellen Bestätigung dieses Gesetzes dürfen wir schließen, daß die Prinzipien der elektromagnetischen Mechanik, auf welche unser Beweis sich stützt, der Wirklichkeit entsprechen.

Schwierigkeiten erwachsen der Elektronentheorie durch das negative Ergebnis aller bisherigen Versuche, die auf eine Entdeckung des Einflusses der Erdbewegung auf das Licht irdischer Lichtquellen hinzielen. Zu diesen Fragen nehmen wir in den letzten Paragraphen Stellung.

Herrn Dr. P. Hertz bin ich für seine Mitarbeit an dem Register, welches beide Bände der „Theorie der Elektrizität" umfaßt, zu Dank verpflichtet und nicht minder Herrn Dr. G. Rümelin für seine Hilfe beim Lesen der Korrekturen des zweiten Bandes.

Die Theorie der Elektrizität scheint jetzt in das Stadium einer ruhigeren Entwickelung eingetreten zu sein. Es scheint der Zeitpunkt gekommen, wo man Halt machen und auf das Erreichte zurückschauen darf. Einem solchen Rückblick ist das vorliegende Werk gewidmet. Es will über die Grundlagen der Theorie Klarheit verbreiten und so den weiteren Fortschritt vorbereiten. Mag es dies Ziel nicht verfehlen!

Wiesbaden, im März 1905.

M. Abraham.

Vorwort zur zweiten Auflage.

In den drei Jahren, die seit dem Erscheinen der ersten Auflage dieses Bandes verstrichen sind, ist durch die experimentelle Forschung unsere Kenntnis von den verschiedenen Arten elektromagnetischer Strahlung bereichert worden. Zwar scheint das einfache Bild, durch welches die Elektronentheorie in ihrer ursprünglichen Form die Verknüpfung von Materie und Elektrizität darstellt, die Mannigfaltigkeit der Erscheinungswelt nicht immer naturgetreu wiederzugeben; doch hat diese Theorie sich im großen und ganzen als zuverlässiger Führer erwiesen. So sind wesentliche Änderungen in der Auflage des Bandes nicht notwendig gewesen.

Einen Fortschritt hat die Theorie der strahlenden Wärme zu verzeichnen; es ist das Problem der Dynamik des Hohlraumes, welches von F. Hasenöhrl aufgeworfen worden war, durch den zu früh verstorbenen K. v. Mosengeil auf Grund der Gesetze der Lichtflexion am bewegten Spiegel gelöst worden. Hierauf sowie auf die anschließenden Untersuchungen von M. Planck über die Thermodynamik eines bewegten, strahlungserfüllten Hohlraumes gehen wir im § 44 ein.

Die bereits in der ersten Auflage angedeuteten Schwierigkeiten, das Fehlen eines Einflusses der Erdbewegung auf irdische Vorgänge vom Standpunkte der Elektrodynamik aus zu deuten, sind in den letzten Jahren zum Gegenstande zahlreicher theoretischer Abhandlungen gemacht worden. Obwohl die Lorentzschen Feldgleichungen die absolute Geschwindigkeit der Elektronen enthalten, hat man versucht, sie mit dem „Postulat der Relativität", welches einen Einfluß einer gleichförmigen Translationsbewegung auf die Vorgänge in einem abgeschlossenen Systeme ausschließt, zu vereinbaren, wobei von der Freiheit der Hypothesen- und Definitions-Bildung oft ein recht weitgehender Gebrauch gemacht wurde. Diesem Seitensproß der Theorie von H. A. Lorentz sind die letzten sechs Paragraphen des Bandes gewidmet. Es ergibt sich, daß die Einführung des Relativitätspostulats — wenigstens in der Dynamik des Elektrons — zu ungelösten Widersprüchen führt, wofern man an der elektromagnetischen Deutung, die doch allen diesen Entwickelungen zugrunde liegt, festhält (§ 49). Auf dem Gebiete der elektromagnetischen Vorgänge in wägbaren Körpern dagegen, dem ja die zu deutenden negativen Versuchsergebnisse angehören, wird durch die Grundgleichungen von H. Minkowski (§§ 38, 50) dem Relativitätspostulate genügt; hier mündet die Elektronentheorie in eine mehr phänomenologische Darstellungsweise aus, welche mit der schon früher von E. Cohn gegebenen in mancher Hinsicht verwandt ist.

In der neuen Auflage sind die Zitate meist durch Ziffern ersetzt, welche auf das am Schlusse beigefügte Literaturregister verweisen.

Herrn Dr. C. H. Müller bin ich für seine freundliche Unterstützung bei der Korrektur zu Dank verpflichtet.

Grindelwald, im Juli 1908.

M. Abraham.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Das Feld und die Bewegung der einzelnen Elektronen.

Erstes Kapitel.

Die physikalischen und mathematischen Grundlagen der Elektronentheorie.

Zweites Kapitel.

Die Wellenstrahlung einer bewegten Punktladung.

Drittes Kapitel.

Die Mechanik der Elektronen.

Zweiter Abschnitt.

Elektromagnetische Vorgänge in wägbaren Körpern.

Erstes Kapitel.

Ruhende Körper.

Zweites Kapitel.

Bewegte Körper.

Erster Abschnitt.

Das Feld und die Bewegung der einzelnen Elektronen.

Erstes Kapitel.

Die physikalischen und mathematischen Grundlagen der Elektronentheorie.

§ 1. Das elektrische Elementarquantum.

Wir erwähnten bereits im ersten Bande dieses Werkes (S. 195), daß die bei der Elektrolyse stattfindenden Vorgänge die Einführung atomistischer Vorstellungen in die Elektrizitätslehre nahelegen. Den von Faraday entdeckten Gesetzen gemäß scheidet ein gegebener Strom in verschiedenen Elektrolyten chemisch äquivalente und der Stromstärke proportionale Mengen wägbarer Materie an den Elektroden ab. Schreibt man der Materie eine atomistische Konstitution zu, so liegt es nahe, auch die Elektrizität aus unteilbaren positiven und negativen Elementarquanten zusammengesetzt zu denken. An jeder Valenz eines elektrolytischen Ions würde ein solches Elementarquantum haften. Die sogenannte Faradaysche Konstante — die von einem Gramm Wasserstoff transportierte Elektrizitätsmenge — gibt nach dieser Auffassung den Quotienten aus Ladung e und Masse m_H eines Wasserstoffions an. Messen wir e in absoluten elektrostatischen Einheiten, so erhalten wir

$$\frac{e}{m_H} = 9660 \cdot 3 \cdot 10^{10} = 2{,}90 \cdot 10^{14}. \tag{1}$$

Diese Beziehung verknüpft das elektrische Elementarquantum e mit dem Atomgewichte m_H des Wasserstoffes.

Die Annahme von Atomen der Elektrizität wird notwendig, sobald man die wägbare Materie als atomistisch konstituiert betrachtet. Wenn nun auch die Atomistik in der Physik der Materie als wertvolle Arbeitshypothese sich erwiesen hat, so steht doch mancher Forscher auch heute noch auf dem Standpunkte, daß für die Materie die Atom- und Molekularhypothese nicht sicher genug begründet sei, um das Lehrgebäude der Chemie und Physik auf ihr aufzubauen. Ein solcher Forscher wird sich durch die Tatsachen der Elektrizitätsleitung in Elektrolyten nicht gezwungen finden, die reale Existenz eines elektrischen Elementarquantums zuzugeben.

Nun hat aber im letzten Jahrzehnt die atomistische Hypothese auf dem Gebiete der Elektrizitätslehre eine neue Stütze erhalten durch die Forschungen, die über die Elektrizitätsleitung der Gase angestellt worden sind. Während die Gase, im Gegensatz zu den Metallen und den Elektrolyten, in ihrem normalen Zustande Nichtleiter oder wenigstens sehr schlechte Leiter sind, kann ihnen durch äußere Einwirkungen — z. B. durch Kathodenstrahlen, durch Röntgenstrahlen oder durch die Strahlung der radioaktiven Körper — eine abnorm große Leitfähigkeit gegeben werden. Diese Leitfähigkeit führt man darauf zurück, daß durch Einwirkung jener Strahlungen im Gase elektrisch geladene Teilchen entstehen, welche nun im elektrischen Felde wandern. Diese positiven und negativen Teilchen bezeichnet man, unter Beibehaltung des in der Elektrolyse gebräuchlichen Wortes, als Ionen. Indessen hat man es bei diesen Gasionen nicht, wie etwa bei einwertigen elektrolytischen Ionen, mit Verbindungen des elektrischen Elementarquantums mit Bestandteilen nur eines Moleküles zu tun; es scheinen sich vielmehr in einem Gase dem elektrischen Kerne neutrale Moleküle in wechselnder, von Temperatur und Druck des Gases abhängiger Anzahl anzulagern.

Der Mechanismus dieser Anlagerung wird verständlich, wenn man auf Grund der Vorstellungen der kinetischen Gastheorie die Wechselwirkungen der elektrischen Kerne mit den neutralen Gasmolekülen betrachtet und das unter dem Ein-

fluß dieser Wechselwirkungen sich herstellende dynamische Gleichgewicht untersucht. Da ein ausführliches Eingehen auf diese Dinge uns von dem eigentlichen Gegenstande dieses Werkes zu weit abführen würde, so sei der Leser auf die sehr lehrreiche Abhandlung von P. Langevin[24]) hingewiesen; dieselbe enthält auch eine Übersicht über die Eigenschaften ionisierter Gase, deren Kenntnis man hauptsächlich den Forschungen der Cambridger Schule verdankt.

Die Existenz diskreter elektrischer Teilchen in einem Gase, welches der Durchstrahlung mit Röntgenstrahlen, mit Kathodenstrahlen oder Radiumstrahlen ausgesetzt war, wird nun durch eine bemerkenswerte Eigenschaft eines solchen Gases bewiesen: Wird es mit Wasserdampf gemischt und der letztere, etwa durch plötzliche Expansion, in den Zustand der Übersättigung gebracht, so findet eine Kondensation des Wasserdampfes statt, es bildet sich eine aus kleinen Tröpfchen bestehende Wolke; und zwar findet dieses bei einem Grade der Übersättigung statt, bei dem ohne vorherige Durchstrahlung des Gases eine Kondensation des Wasserdampfes nicht erfolgt wäre. Da die Eigenschaft, den Wasserdampf zu kondensieren, der durch die Durchstrahlung dem Gase erteilten Leitfähigkeit parallel geht, so liegt es nahe, den Gasionen die Rolle von Kondensationskernen zuzuschreiben Trifft das zu, so macht die Bildung von Wassertröpfchen um die Gasionen als Kerne die Gasionen der unmittelbaren Beobachtung und der Abzählung zugänglich.

Auf der Beobachtung derartiger Wolken von Wassertröpfchen fußen die Bestimmungen der Ladung eines Gasions, die von J. S. Townsend[62]), J. J. Thomson[59]) und H. A. Wilson[69]) ausgeführt worden sind. Die Masse des einzelnen Tröpfchens kann aus der Fallgeschwindigkeit der Wolke berechnet werden. Nach G. G. Stokes ist die Geschwindigkeit, mit der eine kleine Kugel vom Radius a unter dem Einfluß der Schwerkraft fällt, durch die Formel gegeben

$$v = \frac{2}{9} g \frac{a^2}{\zeta},$$

wo g die Beschleunigung der Schwere, ζ den Reibungskoeffizienten des Gases vorstellt. Aus dieser Gleichung ist der Radius und somit die Masse m der Tröpfchen zu bestimmen.

Die Geschwindigkeit eines jeden Tröpfchens ist proportional der auf dasselbe wirkenden Kraft; wirkt nur die Schwere, so beträgt die Kraft mg. Wird aber ein elektrisches Feld $\mathfrak{E}$ erregt, so ist der Schwerkraft mg die Kraft $e\mathfrak{E}$ hinzuzufügen, die das Feld auf das geladene Tröpfchen ausübt. Diese Kraft wirkt, wenn $\mathfrak{E}$ vertikal nach unten gerichtet ist, im Sinne der Schwerkraft oder im entgegengesetzten, je nachdem es sich um die positiven oder um die negativen Tröpfchen handelt. Die Fallgeschwindigkeit wird dadurch geändert, im Verhältnis

$$\frac{v'}{v} = \frac{mg \pm e|\mathfrak{E}|}{mg}.$$

Durch Beobachtung der Fallgeschwindigkeit, zuerst unter dem Einfluß der Schwerkraft allein, dann unter Mitwirkung eines vertikalen elektrischen Feldes, kann somit die Ladung e des einzelnen Tröpfchens ermittelt werden. Auf diesem Wege fand H. A. Wilson für e als mittleren Wert $3{,}1 \cdot 10^{-10}$ elektrostatische Einheiten. Dieses Ergebnis ist in guter Übereinstimmung mit den letzten Resultaten J. J. Thomsons.

Enthält nun ein Tröpfchen nur ein einziges Ion, so ist durch diese Zahl die Ladung eines Gasions gegeben. A priori wäre es allerdings denkbar, daß einzelne Tröpfchen mehrere Ionen enthielten, doch ist dieses angesichts der gleichen Beschaffenheit aller Tröpfchen höchst unwahrscheinlich. Es beträgt hiernach die Ladung eines Gasions rund

$$e = 3 \cdot 10^{-10} \tag{2}$$

elektrostatische Einheiten.

Durch sinnreiche Versuche, die J. S. Townsend[62]) über die Wanderungsgeschwindigkeit und die Diffusion der Gasionen angestellt hat, ist ferner bewiesen, daß die Ladung der Gasionen in allen Fällen gleich der Ladung eines einwertigen elektrolytischen Ions ist. Dieses Ergebnis macht es höchst wahrscheinlich, daß die elektrische Ladung der Teilchen, deren

Existenz jene Kondensationsphänomene enthüllen, mit dem elektrischen Elementarquantum identisch ist.

Setzen wir den Zahlwert (2), der nach Townsend gleichzeitig die Ladung eines Wasserstoffions angibt, in (1) ein, so erhalten wir als Masse eines Wasserstoffatoms:

(2a) $$m_H = 10^{-24} \text{ Gramm.}$$

Ist N die sogenannte Loschmidtsche Zahl, d. h. die Zahl der Moleküle, die sich bei normaler Temperatur und normalem Druck in dem Kubikzentimeter eines Gases befinden, so ist $2m_H \cdot N$ gleich der Dichte des Wasserstoffes $(0{,}8961 \cdot 10^{-4})$. Man erhält demnach für die Loschmidtsche Zahl

(2b) $$N = 4{,}5 \cdot 10^{19},$$

einen Zahlwert, der mit den besten Bestimmungen aus gastheoretischen Daten gut übereinstimmt und wohl als die genaueste vorliegende Bestimmung dieser für die Molekulartheorie fundamentalen Zahl anzusehen ist.

Wir finden also, daß die verschiedensten Eigenschaften der Materie und der Elektrizität zu denselben Werten der fundamentalen Konstanten der Atomistik führen. Es bestätigen sich in befriedigender Weise die Grundvorstellungen der atomistischen Hypothese. Wir werden daher in dem vorliegenden zweiten Bande der „Theorie der Elektrizität" die Elektrizität als aus kleinsten elektrischen Elementarquanten bestehend annehmen.

§ 2. Die Kathodenstrahlen.

Schickt man den elektrischen Strom durch eine stark evakuierte Glasröhre, so zeigen die Wände der Röhre eine eigentümliche grüne Fluoreszenz. Die experimentelle Untersuchung dieser Erscheinung, die zuerst von J. Plücker, W. Hittorf und E. Goldstein unternommen wurde, hat zu der Erkenntnis geführt, daß man es hier mit einer Art von Strahlen zu tun hat, die von der Kathode ausgehen; sie wurden demgemäß von dem letztgenannten Forscher als „Kathodenstrahlen" bezeichnet. Über die Natur dieser Strahlen wurden zwei ver-

schiedene Hypothesen aufgestellt, die man als „Emissionshypothese“ und „Undulationshypothese“ unterscheiden kann. Die Emissionshypothese, die hauptsächlich in England, durch W. Crookes und A. Schuster, entwickelt wurde, betrachtete die Kathodenstrahlen als negativ geladene Gasmoleküle, die von der Kathode abgestoßen und in die Röhre hinein geschleudert werden. Manche Tatsachen, insbesondere die magnetische Ablenkbarkeit der Strahlen, fügten sich ungezwungen dieser Erklärung. In Deutschland verhielt man sich dieser Erklärung gegenüber dennoch ablehnend; man hielt die Kathodenstrahlen für eine viel feinere, dem Lichte ähnliche Erscheinung. Diesen Standpunkt vertrat auch Heinrich Hertz, der zuerst fand, daß die Kathodenstrahlen durch dünne Metallblättchen hindurchdringen. Er sah die magnetische Ablenkung der Kathodenstrahlen als einen der magnetischen Drehung der Polarisationsebene des Lichtes analogen Vorgang an und hatte wohl ursprünglich eine Undulationstheorie im Sinne, welche die Kathodenstrahlen als longitudinale elektromagnetische Wellen deutete; zeigten doch die theoretischen Untersuchungen von Helmholtz, daß die Fernwirkungstheorie der Elektrodynamik solche longitudinalen Wellen zuließ. Nachdem aber durch Hertz selbst die Maxwellschen Vorstellungen zum Siege geführt waren, blieb für longitudinale Wellen kein Platz mehr. So hat denn die Undulationstheorie der Kathodenstrahlen niemals eine greifbare Gestalt angenommen.

Jene Entdeckung von Heinrich Hertz wurde der Ausgangspunkt für die rasche Entwickelung, welche die Theorie der Kathodenstrahlen in neuerer Zeit erfahren hat. Auf ihr fußten die Arbeiten von Ph. Lenard, welcher die Fortpflanzung der Kathodenstrahlen außerhalb der Entladungsröhre verfolgte und höchst bemerkenswerte Beziehungen der Absorption der Strahlen zur Dichte der durchstrahlten Substanz feststellte. Die Untersuchungen Lenards wiederum gaben den Anstoß zur Entdeckung W. C. Röntgens, daß die Glaswand beim Auftreffen der Kathodenstrahlen eine neue, von ihm als X-Strahlen bezeichnete Strahlenart aussendet.

Durch die Röntgensche Entdeckung wurde eine Reihe von Physikern zur quantitativen Untersuchung der Kathodenstrahlen angeregt. Insbesondere sind die Arbeiten von E. Wiechert[66]), W. Kaufmann[21]), W. Kaufmann und E. Aschkinass[22]), sowie diejenigen von J. J. Thomson[60]) und Ph. Lenard[27]) bemerkenswert. Diese bestätigten die Emissionshypothese insofern, als sie übereinstimmend ergaben, daß die Erscheinungen sich widerspruchsfrei erklären lassen, wenn man negativ geladene, träge Teilchen in dem Kathodenstrahle bewegt annimmt. Sie rechtfertigten andererseits die von den Gegnern der Emissionstheorie geltend gemachten Bedenken insofern, als sie für den Quotienten aus Ladung und träger Masse der Teilchen Zahlwerte ergaben, die den Quotienten $e:m_H$ aus Ladung und Masse eines elektrolytischen Wasserstoffions um das Zweitausendfache übertreffen. Auch ergab sich, daß die Eigenschaften der Kathodenstrahlen von der chemischen Natur des Gases und dem Elektrodenmaterial unabhängig sind und nur von der Potentialdifferenz abhängen, durch die sie auf ihre Geschwindigkeit gebracht sind. In Anbetracht dieser Tatsache wäre die Annahme, daß die Träger der Strahlen Atome der wägbaren Materie sind, etwa Wasserstoffatome, geladen mit 2000 negativen Elementarquanten, höchst unwahrscheinlich. Vom atomistischen Standpunkte aus ist es eher plausibel, daß die Ladung jedes Strahlteilchens ein elektrisches Elementarquantum, daß aber die träge Masse nur ein Zweitausendstel der Masse des Wasserstoffions ist. Die weitere Entwickelung hat diese letztere Vermutung mehr und mehr bestätigt: Es sind die von wägbarer Materie freien Atome der negativen Elektrizität, die sich im Kathodenstrahle bewegen.

Wir wollen mit J. Stoney diese Atome negativer Elektrizität als „Elektronen" bezeichnen. Wir schreiben ihnen die Ladung $(-e)$ und die träge Masse m zu und leiten, allein auf Grund dieser Eigenschaften, die an Kathodenstrahlen festgestellten Gesetze ab. Die Erörterung der Frage, wieso die Elektronen, wenn sie unbelastet mit wägbarer Materie sich bewegen, überhaupt Trägheit besitzen, weisen wir einem späteren Abschnitte zu.

Da die Bewegung des Elektrons im leeren Raume stattfindet, so brauchen wir zwischen magnetischer Induktion $\mathfrak{B}$ und magnetischer Feldstärke $\mathfrak{H}$ nicht zu unterscheiden. Auf das bewegte Elektron, von der Ladung $(-e)$, wirkt somit im elektromagnetischen Felde nach Bd. I, § 96, Gl. 246a, S. 426, die Kraft

$$\mathfrak{K} = -e\mathfrak{F}, \tag{3}$$

wo

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}] \tag{3a}$$

die auf die Einheit der Ladung berechnete elektromagnetische Kraft darstellt.

Die Bewegungsgleichung des Elektrons lautet daher

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -e\mathfrak{F}. \tag{4}$$

Wir führen zur Abkürzung für den Quotienten

$$\eta = \frac{e}{cm} \tag{4a}$$

aus dem elektromagnetisch gemessenen Betrage der Ladung $\left(\frac{e}{c}\right)$ und der Masse (m) des Elektrons die Bezeichnung „spezifische Ladung" ein; es wird die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -c\eta\mathfrak{F} = -c\eta\mathfrak{E} - \eta[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]. \tag{4b}$$

Das zweite Glied der rechten Seite der Bewegungsgleichung enthält die vom magnetischen Felde herrührende Kraft bzw. Beschleunigung; da diese stets senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ steht, so bedingt das Vorhandensein eines äußeren magnetischen Feldes niemals eine Arbeitsleistung.

Ist insbesondere das äußere elektrische Feld ein elektrostatisches und φ sein Potential, so ist

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = e\nabla\varphi. \tag{5}$$

Die skalare Multiplikation mit $\mathfrak{v}$ ergibt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\mathfrak{v}^2\right) = m\mathfrak{v}\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = e(\mathfrak{v}\nabla\varphi) = e\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{ds}{dt},$$

und die Integration nach der Zeit für das Intervall von t_0 bis t

$$\frac{1}{2} m \mathfrak{v}^2 - \frac{1}{2} m \mathfrak{v}_0^2 = e(\varphi - \varphi_0). \tag{5a}$$

Hier steht links der Zuwachs der lebendigen Kraft des Elektrons, rechts die Arbeit, die das elektrostatische Feld in dem betreffenden Zeitintervalle an dem Elektron geleistet hat; letztere ist proportional dem Anstiege des elektrostatischen Potentiales.

Bewegt sich etwa das Elektron von der auf dem Potential φ_0 gehaltenen Kathode bis zu einem Punkte, dessen Potential bekannt ist, so bestimmt (5a) die Geschwindigkeit $|\mathfrak{v}|$, wenn die Geschwindigkeit $|\mathfrak{v}_0|$ gegeben ist, mit der das Elektron die Kathode verläßt. Diese Anfangsgeschwindigkeit ist freilich unbekannt. Man nimmt indessen mit gutem Grunde an, daß sie klein ist gegen die Geschwindigkeiten, die es beim Durchlaufen des starken in der Entladungsröhre herrschenden elektrischen Feldes erhält. Man setzt daher $\mathfrak{v}_0 = 0$ und findet

$$|\mathfrak{v}| = \sqrt{\frac{2e}{m}(\varphi - \varphi_0)} = \sqrt{2c\eta(\varphi - \varphi_0)}. \tag{6}$$

Wir wollen nun den Fall behandeln, wo das Elektron mit der so erhaltenen Geschwindigkeit (6) in einen Raum eintritt, in welchem ein konstantes elektrostatisches Potential herrscht. Ist kein magnetisches Feld vorhanden, so wird es sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit weiter bewegen. Treten indessen magnetische Kräfte hinzu, so wird die Bahn sich krümmen. Wir wollen annehmen, daß das magnetische Feld homogen ist, und daß das Elektron in dieses Feld mit einer zu den Kraftlinien senkrechten Geschwindigkeit hineinfliegt. Der Beschleunigungsvektor ist dann nach (4b)

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\eta[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]. \tag{6a}$$

Das Elektron bewegt sich, wie die Zerlegung des Beschleunigungsvektors in eine zu $\mathfrak{v}$ parallele und eine zu $\mathfrak{v}$ senkrechte Komponente (Bd. I § 5, Gl. 14a, S. 14) ergibt, in einer zu $\mathfrak{H}$ senkrechten Ebene mit konstanter Geschwindigkeit.

Es beschreibt eine Kreisbahn, deren Radius R durch die Gleichung bestimmt ist

$$\frac{\mathfrak{v}^2}{R} = \eta \cdot |\mathfrak{v}| \cdot |\mathfrak{H}|.$$

Die Bahnkrümmung

$$\frac{1}{R} = \eta \cdot \frac{|\mathfrak{H}|}{|\mathfrak{v}|} \tag{7}$$

ist demnach um so größer, je stärker das magnetische Feld und je kleiner die Geschwindigkeit des Elektrons ist.

Ist das homogene magnetische Feld nicht senkrecht zu der ursprünglichen Bewegung des Elektrons gerichtet, so zerlegen wir zweckmäßigerweise den Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ in zwei Vektoren, $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$, von denen der erste zu $\mathfrak{H}$ parallel, der zweite zu $\mathfrak{H}$ senkrecht ist. Der erste liefert keinen Beitrag zu dem Vektorprodukte aus $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{H}$. Projizieren wir die Bewegung einerseits auf eine zu $\mathfrak{H}$ parallele Gerade, andererseits auf eine zu $\mathfrak{H}$ senkrechte Ebene, so zerfällt (6a) in die beiden Gleichungen

$$\frac{d\mathfrak{v}_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{v}_2}{dt} = -\eta\,[\mathfrak{v}_2\mathfrak{H}]. \tag{7a}$$

Die zu $\mathfrak{H}$ parallele Komponente der Geschwindigkeit bleibt konstant. Auf eine zu $\mathfrak{H}$ senkrechte Ebene projiziert, stellt sich die Bewegung als Kreisbahn dar, mit dem reziproken Radius

$$\frac{1}{R_2} = \eta \cdot \frac{|\mathfrak{H}|}{|\mathfrak{v}_2|}. \tag{7b}$$

In einem homogenen magnetischen Felde beschreibt das Elektron demnach eine Schraubenlinie. In dem speziellen Falle, wo die Bewegung anfangs senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien erfolgte, artet die Bahn in eine Kreisbahn aus.

Wir betrachten wieder den letztgenannten Spezialfall und drücken die Geschwindigkeit $|\mathfrak{v}|$ auf Grund von (6) durch die durchlaufene Potentialdifferenz $(\varphi - \varphi_0)$ aus. Alsdann ergibt Gleichung (7):

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\frac{\eta}{2c(\varphi - \varphi_0)}} \cdot |\mathfrak{H}|. \tag{8}$$

Die Krümmung des Kathodenstrahles im senkrechten Magnetfelde ist der Wurzel aus der durchlaufenen Potentialdifferenz umgekehrt proportional. Die Versuche von W. Kaufmann[21]) haben dieses Gesetz ergeben und so das Zutreffen der zugrunde gelegten Bewegungsgleichung bestätigt.

Diese Messungen konnten gleichzeitig dazu dienen, die spezifische Ladung der Kathodenstrahlträger zu ermitteln. So erhielten W. Kaufmann[21]) und S. Simon[53]) den Wert

$$\eta = \frac{e}{cm} = 1{,}865 \cdot 10^7, \tag{9}$$

für die spezifische Ladung des negativen Elektrons.

Eine jede der Gleichungen (6) oder (7) kann verwandt werden, um die Geschwindigkeit zu berechnen, die den Elektronen in der Entladungsröhre erteilt wird. Dieselbe liegt bei den üblichen Spannungsdifferenzen von Anode und Kathode zwischen $^1/_{10}$ und $^1/_3$ der Lichtgeschwindigkeit. Werte von derselben Größenordnung sind von E. Wiechert[66]) durch direkte Messung der Geschwindigkeit gefunden worden.

Da nach (9)

$$\frac{e}{m} = 5{,}60 \cdot 10^{17} \tag{9a}$$

ist, so folgt durch Vergleichung mit (1)

$$\frac{m_H}{m} = 1930 \tag{9b}$$

als Quotient der trägen Massen von Wasserstoffatom und Elektron.

§ 3. Klassifikation der Strahlungen.

Die Maxwellsche Theorie versteht unter „Strahlung" einen elektromagnetischen Energiestrom; diesen bestimmt sie durch den Poyntingschen Vektor (vgl. I § 85). Sie lehrt, daß die Lichtwellen elektromagnetische Energie mitführen, mithin als Strahlungsvorgänge anzusprechen sind. Die Lichtwellen, wie überhaupt alle elektromagnetischen Wellen, pflanzen sich in dem leeren Raume mit der Geschwindigkeit

$$c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

fort (vgl. I § 75, S. 316). Die verschiedenen Arten elektromagnetischer Wellen, welche wir kennen, sind nur der Wellenlänge, aber nicht der Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach verschieden. Ordnen wir nach der Wellenlänge, so haben wir zuerst die ultravioletten Strahlen, dann das eigentliche sichtbare Licht; dann folgen die ultraroten, nur durch ihre thermische Wirkung sich kundgebenden Strahlen, deren langwelligste die Rubensschen Reststrahlen sind. Zwischen den längsten bekannten Wärmestrahlen ($\lambda = 6 \cdot 10^{-3}$ cm) und den kürzesten Wellenlängen der vom elektrischen Funken ausgelösten Schwingungen ($\lambda = 0{,}6$ cm) klafft noch eine beträchtliche Lücke. Dann folgt eine kontinuierliche Reihe von Wellen, die wir auf rein elektrischem Wege herzustellen vermögen; sie erstreckt sich von den raschesten Hertzschen Schwingungen bis zu den langsamsten Wechselströmen der Technik.

Alle diese Strahlungen können wir durch die Benennung „Wellenstrahlung“ kennzeichnen. Darunter verstehen wir nicht nur rein periodische Wellen, sondern auch Wellen beliebiger Wellenform. Das für die Wellenstrahlung Charakteristische ist die unabänderliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit im leeren Raume.

Zu der so definierten Wellenstrahlung gehören nun die Kathodenstrahlen, von denen wir im vorigen Paragraphen berichteten, nicht. Diesen Strahlen kommt hingegen eine Eigenschaft zu, die den obengenannten Wellenstrahlungen fehlt: sie führen nicht nur Energie, sondern auch Elektrizität mit. Wir wollen eine jede Strahlung, die Elektrizität mitführt, als „Konvektionsstrahlung“ bezeichnen. Die Kathodenstrahlen insbesondere stellen einen Strom negativer Elektronen dar. Da wir die Eigenschaften dieser Atome der negativen Elektrizität als unabänderliche ansehen, so bleibt als unterscheidendes Merkmal verschiedener Kathodenstrahlen nur die Geschwindigkeit der Elektronen übrig.

Die Geschwindigkeit der in einer Entladungsröhre zu erzeugenden Kathodenstrahlen hängt, wie wir sahen, von der Potentialdifferenz der Elektroden ab. Man kann jedoch diese Potentialdifferenz nicht beliebig wählen, da bei geringen Spannungen die Entladung nicht stattfindet, und da beliebig hohe Spannungen nicht zur Verfügung stehen. Hierdurch ist das „Spektrum" der nach der Geschwindigkeit geordneten Kathodenstrahlen begrenzt. Doch hat Ph. Lenard gezeigt, daß bei Betrachtung eines Metalles mit ultraviolettem Lichte Strahlen ausgesandt werden, welche ähnliche Eigenschaften, nur geringere Geschwindigkeit der Strahlteilchen aufweisen, wie die eigentlichen Kathodenstrahlen. Andererseits hat sich ergeben, daß die Strahlung radioaktiver Körper, und zwar der Bestandteil der Strahlung, den Rutherfort als β-Strahlung bezeichnet hat, magnetisch in demselben Sinne, nur etwas schwächer, ablenkbar ist, wie die Kathodenstrahlen. Es lag nahe, hier negative Elektronen von größerer Geschwindigkeit zu vermuten. In der Tat haben die Untersuchungen von W. Kaufmann, auf die wir später ausführlicher zurückkommen, gezeigt, daß die Geschwindigkeiten der in den β-Strahlen anzunehmenden Elektronen ein kontinuierliches Spektrum darstellen, das sich von der halben Lichtgeschwindigkeit bis nahe an die Lichtgeschwindigkeit selbst heran erstreckt. Noch besteht eine Lücke zwischen den raschesten der messend zu verfolgenden Kathodenstrahlen und den langsamsten β-Strahlen. Wenn diese ausgefüllt sein wird, so wird man eine kontinuierliche Reihe von negativen Konvektionsstrahlungen haben, die von beliebig kleinen Geschwindigkeiten bis nahe an die Lichtgeschwindigkeit heranreicht.

Von positiver Konvektionsstrahlung haben wir bisher nicht gesprochen. Man hat gefunden, daß die leicht absorbierbare Strahlung radioaktiver Körper, die sogenannte α-Strahlung, aus positiv geladenen Teilchen besteht. Auch gewisse, die elektrische Entladung in verdünnten Gasen begleitende Erscheinungen, die Kanalstrahlen E. Goldsteins, hat man auf bewegte positive Teilchen zurückführen zu können geglaubt.

Es haben sich für den Quotienten aus Ladung und Masse in beiden Fällen Zahlwerte ergeben, die von der Größenordnung des bei Wasserstoffionen vorliegenden Wertes waren. Doch sind diese positiven Konvektionsstrahlungen noch nicht genügend erforscht, um Schlüsse auf die Natur der positiven Elektrizität zu gestatten. Hat man es hier mit den freien positiven Elektronen zu tun, und ist diesen eine so viel größere Trägheit zuzuschreiben, als den negativen? Oder sind diese Strahlteilchen, wie die Gasionen (§ 1), durch Anlagerung wägbarer Materie an die Elektronen entstanden? Oder ist etwa die positive Elektrizität überhaupt von der Materie nicht zu trennen? Das sind Fragen, deren Erledigung der Zukunft vorbehalten bleiben muß.

In diesem zweiten Bande der „Theorie der Elektrizität" soll nun die elektromagnetische Strahlung in umfassender Weise behandelt werden, sowohl die Wellenstrahlung, wie die Konvektionsstrahlung. Die Grundlage für die Theorie der Strahlung gewinnen wir, indem wir die atomistischen Vorstellungen über die Konstitution der Elektrizität mit den Faraday-Maxwellschen Ideen über das elektromagnetische Feld vereinigen. Die Vereinigung dieser beiden Vorstellungskreise ist es, die zur modernen Elektronentheorie führt. Man trifft bei manchen Autoren die Auffassung an, daß die atomistischen Ideen in einem gewissen Gegensatze zur Maxwellschen Theorie stünden, und daß die Elektronentheorie eigentlich zu den alten Vorstellungen der Fernwirkungshypothese zurückkehre. Diese Auffassung ist indessen durchaus unzutreffend. Allerdings ist die Hypothese einer atomistischen Struktur der Elektrizität wohl zuerst, insbesondere durch Wilhelm Weber, in einer Weise eingeführt worden, welche den Vorstellungen der Fernwirkungstheorie entsprach. Dieser Forscher stellte ein Elementargesetz für die Wechselwirkung zweier elektrischer Atome an die Spitze und suchte auf dieses die gesamte Elektrodynamik zu begründen. Daß diese Bemühungen Webers und anderer Physiker scheiterten, lag gerade an der Verkoppelung

der atomistischen Vorstellung mit der Fernwirkungshypothese, welche die der Atomistik innewohnende Entwickelungsfähigkeit erstickte. Erst die Abwendung von der Fernwirkungstheorie und die Verschmelzung mit der Faraday-Maxwellschen Lehre konnte die atomistischen Keime zur Blüte bringen und für die Elektrizitätslehre fruchtbare Ergebnisse zeitigen.

Die Maxwellsche Theorie, weit entfernt, die Frage nach der Struktur der Elektrizität als unberechtigt zurückzuweisen, ermöglicht vielmehr erst eine allseitige Untersuchung der für diese Frage bedeutungsvollen Erscheinungen. Indem sie das Licht als elektromagnetischen Vorgang betrachtet, lehrt sie, aus der Strahlung einer Lichtquelle Schlüsse auf die Eigenschaften der elektrischen Teilchen zu ziehen, die in den lichtaussendenden Molekülen schwingen. So hat das *Zeemansche Phänomen* gezeigt, daß eine große Zahl von Spektrallinien in der Bewegung der negativen Elektronen ihren Ursprung hat. Eine magnetische Zerlegung der Spektrallinien, die auf die Schwingungen positiver Elektronen in der Lichtquelle zurückzuführen wäre, hat sich nicht sicher feststellen lassen; infolge der größeren, diesen Teilchen anhaftenden trägen Masse würde eine solche Zerlegung auch theoretisch unterhalb der Grenze der Beobachtbarkeit liegen. Hier tritt die enge, von der elektromagnetischen Lichttheorie behauptete Beziehung zwischen dem Konvektionsstrome und der Lichtstrahlung deutlich hervor. In der Sprache der Elektronentheorie läßt sich diese Beziehung so formulieren: *Die Konvektionsstrahlung ist ein Strom freier Elektronen, die Wellenstrahlung nimmt ihren Ausgang von Geschwindigkeitsänderungen der Elektronen.*

Wo die Kathodenstrahlen auf die Röhrenwand treffen, nehmen die *Röntgenstrahlen* ihren Ursprung. Wir werden, mit G. G. Stokes und E. Wiechert, in diesen magnetisch nicht ablenkbaren Strahlen die elektromagnetischen Wellen sehen, welche von den gehemmten Elektronen ausgehen. Dabei scheint es sich nicht um periodische Wellenzüge, sondern um Einzelimpulse zu handeln, deren Impulsbreite weit kleiner ist als die

Wellenlänge der kurzwelligsten ultravioletten Strahlen. Aus den Beugungsversuchen von Haga und Wind hat sich ergeben, daß die Impulsbreite nicht mehr als 10^{-8} cm beträgt, falls es sich überhaupt um Wellenimpulse handelt. Doch ist es, da die Röntgenstrahlen sich weder brechen noch spiegeln lassen, schwierig, ihre Wellennatur experimentell festzustellen.

Die dritte, nicht ablenkbare Klasse der Radiumstrahlen, die sogenannten γ-Strahlen, weist Eigenschaften auf, welche denen besonders durchdringender Röntgenstrahlen gleichen. Es liegt nahe, sie als die Wellenimpulse anzusprechen, welche beim Fortschleudern der Elektronen durch die radioaktiven Atome erregt werden.

§ 4. Die Grundgleichungen der Elektronentheorie.

Um zu den Grundgleichungen der Elektronentheorie zu gelangen, gehen wir von den Hauptgleichungen der Maxwellschen Theorie aus (I, § 65). Die erste Hauptgleichung lautet (I, Gl. 177, S. 243)

$$\mathrm{curl}\, \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \cdot \mathfrak{c},$$

wobei $\mathfrak{c}$ die Dichte des Gesamtstromes ist.

Die Elektronentheorie kennt nur zwei Bestandteile des Gesamtstromes, den Verschiebungsstrom im Äther und den Konvektionsstrom bewegter Elektronen; die Dichte des Verschiebungsstromes im Äther ist gleich

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t},$$

die Dichte des elektrostatisch gemessenen Konvektionsstromes ist gegeben durch (vgl. I, § 55, Gl. 159, S. 194)

$$\mathfrak{i} = \varrho \mathfrak{v},$$

wo ϱ die räumliche Dichte, $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit der konvektiv bewegten Elektrizität bezeichnet. Wir wollen der einfacheren Schreibweise wegen es vorziehen, den Konvektionsstrom elektromagnetisch zu messen. Alsdann wird

(10) $$\mathfrak{k} = \frac{\varrho \mathfrak{v}}{c},$$

und es ist die erste Grundgleichung zu schreiben

(I) $$\operatorname{curl} \mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = 4\pi \mathfrak{k}.$$

In der zweiten Hauptgleichung (I, Gl. 178, S. 245) streichen wir die eingeprägte elektrische Kraft. Im leeren Raume, wo $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ ist, nimmt dann die zweite Hauptgleichung die Form an:

(II) $$\operatorname{curl} \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = 0.$$

Diese beiden Grundgleichungen nehmen wir auch im Innern der Elektronen als gültig an.

Die allgemeine Beziehung zwischen der Dichte der Elektrizität und der Divergenz der elektrischen Verschiebung (vgl. I, Gl. 135a, S. 147) behält die Elektronentheorie bei; da sie $\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}$ setzt, so wird

(III) $$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\varrho.$$

Auch die allgemeine Bedingung der Quellenfreiheit des Vektors $\mathfrak{B}$ (I, Gl. 178a, S. 246) wird aus der Maxwellschen Theorie herübergenommen; da $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{H}$ identifiziert wird, so wird

(IV) $$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0.$$

Für den von Materie und von Elektronen leeren Raum, wo ϱ und $\mathfrak{k}$ verschwinden, stimmen diese Grundgleichungen mit den Hertz-Heavisideschen Feldgleichungen überein; sie führen wie jene zu dem Ergebnisse, daß hier ebene elektromagnetische Wellen nach allen Richtungen mit der gleichen Geschwindigkeit c forteilen. Auf ein Bezugssystem, in dem diese Isotropie der Wellenfortpflanzung statthat, sind die Bewegungen der Elektronen zu beziehen. Die in einem solchen System gemessene Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ der Elektronen ist es, welche in den Ausdruck (10) für die Dichte des Konvektionsstromes eingeht. Neben dem kinematischen Vektor $\mathfrak{v}$ enthält das System der Feldgleichungen (I) bis (IV) nur zwei Vektoren,

den elektrischen Vektor $\mathfrak{E}$ und den magnetischen Vektor $\mathfrak{H}$. Es ist die einfachste Erweiterung des für den Äther geltenden Systems von Feldgleichungen, welche die eingelagerten Elektronen und ihre Bewegung berücksichtigt.

Zu diesen Feldgleichungen tritt endlich eine Aussage über die an den Volumelementen der Elektronen angreifende Kraft. Es wird, in Übereinstimmung mit Bd. I, § 96, Gl. 246a, S. 426, für die auf die Einheit der Ladung wirkende Kraft der Ansatz gemacht:

$$\text{(V)} \qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}] \cdot$$

Der Vektor $\mathfrak{F}$, die „elektromagnetische Kraft pro Einheit der Ladung", ist durch die Grundgleichung (V) auf die drei in den Feldgleichungen auftretenden Vektoren zurückgeführt. Wir können diesen Ausdruck für die elektromagnetische Kraft um so eher akzeptieren, als wir ja im § 2 dieses Bandes uns davon überzeugt haben, daß er die Kraft, die in einem gegebenen äußeren Felde auf die Kathodenstrahlteilchen wirkt, in befriedigender Weise darstellt.

Wir wollen uns davon überzeugen, daß der zugrunde gelegte Ansatz für die elektromagnetische Kraft mit dem Energieprinzipe im Einklang ist. Wir denken uns zu diesem Zwecke einen Bereich v, der von der ruhenden Fläche f begrenzt ist. Auf die im Volumenelemente dv enthaltene Elektrizität übt das elektromagnetische Feld die Kraft $\mathfrak{F}\varrho dv$ aus. Diese leistet pro Sekunde die Arbeit

$$(\mathfrak{v}\mathfrak{F})\varrho dv = (\varrho\mathfrak{v}\mathfrak{E})dv \,.$$

Hier ist der vom magnetischen Felde herrührende Anteil der Kraft, der stets senkrecht zur Bewegungsrichtung der Elektrizität weist und daher zur Arbeit nichts beiträgt, fortgefallen. Durch Integration über den Bereich v erhalten wir mithin für die Arbeitsleistung der elektromagnetischen Kraft

$$\frac{dA}{dt} = \int(\varrho\mathfrak{v}\mathfrak{E})dv \,.$$

Da nun, nach (10), der Vektor $\rho\mathfrak{v}$ die Dichte des Konvektionsstromes bestimmt, so folgt aus der ersten Grundgleichung

$$\frac{dA}{dt} = c\int(\mathfrak{i}\mathfrak{E})dv = \frac{c}{4\pi}\int dv\left(\mathfrak{E}, \operatorname{curl}\mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}\right).$$

Ferner ist, nach einer allgemeinen Regel der Vektorrechnung (I, Gl. 102a, S. 96),

$$\int df[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_n = \int dv\mathfrak{H} \operatorname{curl}\mathfrak{E} - \int dv\mathfrak{E} \operatorname{curl}\mathfrak{H},$$

oder, mit Rücksicht auf die zweite Grundgleichung,

$$\int dv\mathfrak{E} \operatorname{curl}\mathfrak{H} = -\frac{1}{c}\int dv\mathfrak{H}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} - \int df[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_n;$$

dabei stellt n die äußere Normale der Begrenzungsfläche f vor. Es folgt also schließlich

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{d}{dt}\int\frac{dv}{8\pi}\left\{\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\right\} - \int df\frac{c}{4\pi}\left[\mathfrak{E}\mathfrak{H}\right]_n. \tag{11}$$

Dieses ist nichts anderes als die Energiegleichung. Setzen wir, in Übereinstimmung mit der Maxwellschen Theorie,

$$W = \int\frac{dv}{8\pi}\left\{\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\right\} \tag{12}$$

für die elektromagnetische Energie des Raumes und

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\mathfrak{E}\mathfrak{H}\right] \tag{13}$$

für den elektromagnetischen Energiestrom, so können wir (11) schreiben

$$\frac{dA}{dt} + \int df\mathfrak{S}_n = -\frac{dW}{dt}.$$

Die Arbeit der elektromagnetischen Kräfte, die in dem Bereiche v wirken, vermehrt um den elektromagnetischen Energiestrom, der durch die Begrenzungsfläche f hinausströmt, ist der Abnahme der elektromagnetischen Energie des Bereiches gleich; Arbeitsleistung der elektromagnetischen Kräfte und

Strahlung erfolgen beide auf Kosten der elektromagnetischen Energie W; dabei sind für Energiedichte und Energiestrom die aus der Maxwellschen Theorie bekannten Ausdrücke beizubehalten. Gleichung (11) spricht das Energieprinzip für das elektromagnetische Feld bewegter Elektronen aus. Wie unser Beweis zeigt, folgt dasselbe aus den Grundgleichungen (I) bis (V); es stellt keineswegs eine neue, von den Grundgleichungen unabhängige Aussage dar.

In den allgemeinen Grundgleichungen (I) bis (V) der Elektronentheorie ist die Idee der atomistischen Konstitution der Elektrizität noch nicht zur Formulierung gelangt; diese Grundgleichungen würden es noch zulassen, daß die Elektrizität kontinuierlich den Raum erfüllte. Die atomistische Hypothese nimmt indessen an, daß die Elektrizität, die positive und die negative, aus Elementarquanten $\pm e$ besteht, die durch den Äther voneinander getrennt sind. Dabei genügt es bisweilen, die Ladungen als Punktladungen aufzufassen, insbesondere dann, wenn es sich um die vom Elektron entsandte Wellenstrahlung handelt. Doch bringt die Annahme punktförmiger Elektronen gewisse Schwierigkeiten mit sich. Es besitzt nämlich das Feld, welches eine ruhende Ladung von endlichem Betrage umgibt, eine elektrostatische Energie, die unendlich wird, wenn die Ladung sich auf einen Punkt zusammendrängt. Schon diese Erwägung deutet an, und die eingehende Untersuchung bestätigt es, daß die Elektronen, streng genommen, nicht als elektrische Punkte zu betrachten sind, da ja ihre Ladung und ihre Energie endlich sein sollen. Wir werden uns daher genötigt sehen, der Dynamik der Elektronen neben den allgemeinen Grundgleichungen (I) bis (V) noch besondere Voraussetzungen über die Form und Bewegungsfreiheit dieser Teilchen zugrunde zu legen. Doch werden wir hierauf erst im dritten Kapitel dieses Abschnittes eingehen.

Wir haben die Grundgleichungen (I) bis (V) erhalten, indem wir von den allgemeinen Gleichungen der Maxwellschen Theorie ausgingen und diese in gewisser Weise vereinfachten. Es braucht kaum ausdrücklich bemerkt zu werden, daß dieses

Verfahren nur ein heuristisches ist und keine Beweiskraft besitzt. Müssen wir doch jedesmal, wenn wir eine auf einem gewissen Gebiete als richtig erkannte Theorie auf ein neues Erscheinungsgebiet anwenden wollen, mit der Möglichkeit rechnen, daß sie diesen neuen Tatsachen gegenüber versagt.

Die vorgenommene Übertragung der Maxwellschen Gleichungen auf die Felder der Elektronen ist insbesondere auch aus dem Grunde hypothetisch, weil diese Felder niemals einer direkten experimentellen Prüfung zugänglich werden können. Denn die Methode der Untersuchung des Feldes durch einen Probekörper ist wohl auf die Felder anzuwenden, von denen der erste Band dieses Werkes handelte, aber nicht auf die Felder der Elektronen selbst. Der kleinste denkbare Probekörper ist nämlich, wenn anders die atomistische Vorstellung zutrifft, das Elektron selbst. Das Feld nun, welches das einzelne Elektron umgibt, wechselt natürlich nach Richtung und Stärke beträchtlich in Bereichen von der Größenordnung des Elektrons. Zu seiner Ausmessung würde ein Probekörper notwendig sein, dessen Dimensionen klein gegen diejenigen des Elektrons sind. Es ist also aus prinzipiellen Gründen, von experimentellen Schwierigkeiten ganz abgesehen, das Feld, auf das unsere Grundgleichungen sich beziehen, der direkten Messung unzugänglich. Die Bestätigung der Grundgleichungen muß in dem Zutreffen ziemlich entfernter Folgerungen gesucht werden. Zunächst ist die Übertragung der Grundgleichungen von den der Beobachtung zugänglichen Feldern auf die Felder der Elektrizitätsatome eine durchaus hypothetische.

Eine jede atomistische Theorie muß indessen in entsprechender Weise verfahren. So kann die kinetische Gastheorie nicht umhin, die Bewegung und den Stoß der Gasmoleküle nach Gesetzen zu behandeln, welche der Mechanik der greifbaren Körper entnommen sind. Es kann niemals direkt experimentell nachgewiesen werden, daß die Bewegungen der Moleküle wirklich diesen Gesetzen gehorchen. Die Berechtigung der gemachten Voraussetzungen kann erst nachträglich dadurch geführt werden, daß man ihre Konsequenzen

verfolgt und als zutreffend nachweist. Dabei liegt die Sache sogar in der Elektronentheorie günstiger als in der Molekulartheorie der Materie, indem die Eigenschaften der freien Elektronen selbst in den Kathodenstrahlen und verwandten Strahlungen dem Experimente zugänglich werden, während die regellosen Bewegungen der unelektrischen Atome und Moleküle der direkten Beobachtung unzugänglich und nur in ihren über meßbare Bereiche erstreckten Mittelwerten zu den mechanischen und thermischen Eigenschaften der Materie in Beziehung zu setzen sind.

Die Elektronentheorie beansprucht, die elektrischen, magnetischen und optischen Eigenschaften der Materie in ihrer Gesamtheit darzustellen. Sie geht dabei von gewissen Voraussetzungen über die Eigenschaften der Elektronen in leitenden, dielektrischen und magnetisierbaren Körpern aus und gelangt durch Mittelwertsbildung über Bereiche, die eine sehr große Zahl von Elektronen enthalten, zu den Hauptgleichungen der Maxwellschen Theorie für ruhende Körper; dabei werden die Beziehungen der elektrischen Verschiebung und der Leitungsstromdichte zur elektrischen Feldstärke, sowie die Beziehung der magnetischen Feldstärke zur magnetischen Induktion, anschaulicher gedeutet und in mancher Hinsicht der Erfahrung besser angepaßt, als in der rein phänomenologischen Maxwell-Hertzschen Darstellungsweise.

Der erste, der die Grundgedanken der Elektronentheorie klar formuliert und in umfassender und folgerichtiger Weise insbesondere auf optische Fragen angewandt hat, ist H. A. Lorentz gewesen. Er hat die elektromagnetische Theorie der Farbenzerstreuung[29]) und die Optik bewegter Körper[30]) von diesem Standpunkte aus entwickelt. Auch die Entdeckung Zeemanns ist auf seine Anregung zurückzuführen. Wenn überhaupt die Elektronentheorie, an deren Erfolgen so viele experimentelle und theoretische Physiker Anteil haben, mit dem Namen eines einzelnen Forschers in Verbindung gebracht werden soll, so kann wohl nur der Name von H. A. Lorentz in Frage kommen.

§ 5. Die elektromagnetische Bewegungsgröße.

Wie wir bereits im ersten Bande dieses Werkes (§ 98) erwähnten, besteht hinsichtlich der Beziehung zum dritten Axiome der Newtonschen Mechanik ein gewisser Gegensatz zwischen der Maxwell-Hertzschen Theorie einerseits und der Lorentzschen Theorie andererseits. Jene nimmt an, daß die auf einen Körper wirkenden elektromagnetischen Kräfte stets aus gewissen, über seine Oberfläche verteilten Druck- und Zugkräften resultieren, wobei zwar das Gesetz von Wirkung und Gegenwirkung erfüllt ist, aber zuweilen Kräfte auf die Volumelemente des Äthers auftreten. Der Lorentzschen Theorie sind solche Kräfte auf die von Elektrizität leeren Volumelemente des Raumes fremd. Sie läßt elektromagnetische Kräfte nur auf die Elektrizität wirken; die auf die Volumeinheit berechnete elektromagnetische Kraft (V) der Lorentzschen Theorie

$$\varrho\mathfrak{F} = \varrho\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\left[\mathfrak{v}\mathfrak{H}\right]\right\} \tag{14}$$

verschwindet mit der elektrischen Dichte ϱ.

Wir wollen nunmehr die Konsequenzen verfolgen, die sich aus dieser Auffassung hinsichtlich der Stellung der Elektronentheorie zum dritten Axiome Newtons ergeben.

Wir ziehen, ebenso wie in Bd. I, S. 428, die folgenden Identitäten heran

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_x \operatorname{div}\mathfrak{E} - [\mathfrak{E}\operatorname{curl}\mathfrak{E}]_x = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}\left(\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2\right)\\ + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_z\right),\end{aligned} \tag{14a}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_x \operatorname{div}\mathfrak{H} - [\mathfrak{H}\operatorname{curl}\mathfrak{H}]_x = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}\left(\mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2\right)\\ + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_z\right).\end{aligned} \tag{14b}$$

Mit Rücksicht auf die Grundgleichungen (I) und (III) geht

$$\varrho\mathfrak{F} = \varrho\mathfrak{E} + [\mathfrak{i}\mathfrak{H}]$$

über in

$$\varrho\mathfrak{F} = \frac{1}{4\pi}\left\{\mathfrak{E}\operatorname{div}\mathfrak{E} - \left[\mathfrak{H}, \operatorname{curl}\mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}\right]\right\}. \tag{14c}$$

Andererseits folgt durch Addition von (14a) und (14b), auf Grund von (II) und (IV)

$$(14d)\qquad \mathfrak{E}_x \operatorname{div} \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\left[\mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right]_x - \left[\mathfrak{H} \operatorname{curl} \mathfrak{H}\right]_x = 4\pi\left\{\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right\},$$

wobei unter Verwendung einer in der Elastizitätstheorie gebräuchlichen Schreibweise gesetzt ist

$$(15)\qquad \begin{cases} 4\pi X_x = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2\right) + \frac{1}{2}\left(\mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2\right), \\ 4\pi X_y = \mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y + \mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_y, \\ 4\pi X_z = \mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_z + \mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_z. \end{cases}$$

Durch Kombination von (14c) und (14d) erhalten wir

$$4\pi\varrho\mathfrak{F}_x + \frac{1}{c}\left[\mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right]_x - \frac{1}{c}\left[\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\right]_x = 4\pi\left\{\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right\}$$

oder nach Einführung des Poyntingschen Strahlvektors

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\mathfrak{E}\mathfrak{H}\right]$$

$$(16)\qquad \varrho\mathfrak{F}_x = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial t}.$$

Entsprechende Gleichungen:

$$\varrho\mathfrak{F}_y = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial t},$$

$$\varrho\mathfrak{F}_z = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial t},$$

gelten für die beiden anderen Komponenten der elektromagnetischen Kraft.

Wir überzeugen uns unschwer davon, daß die drei ersten Glieder der rechten Seiten die von den Maxwellschen Spannungen auf die Raumeinheit ausgeübte Kraft darstellen. In der Tat, setzen wir in den Gleichungen (248) und (249) in

§ 97 des ersten Bandes, welche bzw. die elektrische und magnetische Flächenkraft darstellen, $\varepsilon = \mu = 1$, so wird

$$(17)\quad \mathfrak{T} = \mathfrak{T}^e + \mathfrak{T}^m = \frac{1}{8\pi}\left\{2\mathfrak{E}\mathfrak{E}_n + 2\mathfrak{H}\mathfrak{H}_n - \mathfrak{n}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\right\};$$

dabei stellt $\mathfrak{n}$ einen Einheitsvektor vor, der in Richtung der äußeren Normalen n der Fläche weist, über welche die Flächenkraft $\mathfrak{T}$ verteilt ist. Die parallel der x-Achse genommene Komponente dieser von den Maxwellschen Spannungen auf die Flächeneinheit einer beliebig gestellten Fläche ausgeübten Kraft ist demnach

$$(17\text{a})\quad \mathfrak{T}_x = \frac{1}{8\pi}\left\{2\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_n + 2\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_n - \cos(nx)(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\right\}.$$

Legt man nun die Normale n des betrachteten Flächenelementes der Reihe nach parallel der x-Achse, der y-Achse und der z-Achse, so erhält man für $\mathfrak{T}_x$ die durch (15) eingeführten Ausdrücke X_x, X_y, X_z. Diese stellen demnach die parallel der x-Achse genommenen Komponenten der Flächenkraft $\mathfrak{T}$ vor, die auf die Flächeneinheit dreier den Koordinatenebenen paralleler Flächenelemente wirkt; diese drei Größen und die durch zyklische Vertauschung der Koordinaten entstehenden Größen sind mit dem Spannungssysteme identisch, welches Maxwell im elektromagnetischen Felde wirkend annahm; dasselbe ist durch 6 Komponenten

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,\ X_y = Y_x,\ X_z = Z_x,\ Y_z = Z_y$$

gekennzeichnet. Den Lehren der Elastizitätstheorie gemäß besitzt die von diesen Spannungen auf die Volumeinheit ausgeübte Kraft die Komponenten

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \text{ parallel der } x\text{-Achse},$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \text{ parallel der } y\text{-Achse},$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \text{ parallel der } z\text{-Achse}.$$

Nach Maxwell und Hertz sind dieses die auf die Volumeinheit des Äthers berechneten Komponenten

der elektromagnetischen Kraft. Nach Lorentz[30]) ist noch die Kraft

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} \tag{17b}$$

pro Volumeinheit hinzuzufügen, um die gesamte elektromagnetische Kraft $\varrho \mathfrak{F}$ der Elektronentheorie zu erhalten. Diese Zusatzkraft hebt für die Volumelemente des von Elektrizität leeren Raumes gerade die von den Maxwellschen Spannungen ausgeübte Kraft auf.

Wir können dieses Zusatzglied der Anschauung näher bringen, indem wir eine „elektromagnetische Bewegungsgröße" über das Feld mit der Dichte

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{c^2}\mathfrak{S} = \frac{1}{4\pi c}\left[\mathfrak{E}\mathfrak{H}\right] \tag{18}$$

verteilt denken. Dieselbe ist durch die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ bestimmt, für einen jeden Punkt des Feldes. Einer zeitlichen Änderung des Poyntingschen Vektors $\mathfrak{S}$ entspricht eine Änderung der elektromagnetischen Bewegungsgröße, welche die Trägheitskraft (17b) bedingt. Durch diese Trägheitskraft, im Verein mit der über die Oberfläche des betreffenden Bereiches verteilten Flächenkraft $\mathfrak{T}$ (Gl. 17) ist die durch die Grundgleichung (V) definierte elektromagnetische Kraft vollständig zu ersetzen.

In der Tat, da aus (15) und (17a) folgt:

$$X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz = \mathfrak{T}_x,$$

so erhalten wir, indem wir (16) über einen von der Fläche f begrenzten Bereich v integrieren, als x-Komponente der resultierenden elektromagnetischen Kraft:

$$\mathfrak{K}_x = \int dv \varrho \mathfrak{F}_x = \int df \mathfrak{T}_x - \frac{d}{dt}\int dv \mathfrak{g}_x.$$

Gehen wir zur Vektorgleichung über, so erhalten wir

$$\mathfrak{K} = \int dv \varrho \mathfrak{F} = \int df \mathfrak{T} - \frac{d\mathfrak{G}}{dt}, \tag{19}$$

wobei

$$(20) \qquad \mathfrak{G} = \int dv\,\mathfrak{g} = \int dv\,\frac{\mathfrak{S}}{c^2}$$

die gesamte, in dem Bereiche v enthaltene elektromagnetische Bewegungsgröße ist.

Die Kraft, welche das elektromagnetische Feld auf einen beliebigen Körper ausübt, ist nach der Lorentzschen Theorie gleich der resultierenden Kraft $\mathfrak{K}$ auf die im Innern des Körpers befindlichen Elektronen. Es besagt daher Gleichung (19): Die resultierende elektromagnetische Kraft auf einen beliebigen Körper ist gleich dem über seine Oberfläche erstreckten Integral der Flächenkraft $\mathfrak{T}$, vermindert um die zeitliche Zunahme der gesamten im Innern des Körpers befindlichen elektromagnetischen Bewegungsgröße.

Wir können, wofern die Grundgleichungen der Elektronentheorie zutreffen, die Gleichung (19) auch auf ein System von Körpern anwenden, welche in den Äther eingelagert sind. Wir haben dann im Äther eine Fläche zu konstruieren, welche das ganze System einschließt. An dieser Fläche haben wir uns die Flächenkraft $\mathfrak{T}$ angreifend zu denken; auch haben wir die elektromagnetische Bewegungsgröße sowohl im Innern der Körper als auch in dem Raume zwischen den Körpern in Rechnung zu ziehen.

Eine besonders einfache Form nimmt der Ausdruck (19) der elektromagnetischen Gesamtkraft an, falls wir die Fläche f, die das Körpersystem umschließt, uns so weit entfernt denken, daß sie in dem ganzen Zeitintervalle, in dem der zu betrachtende Vorgang sich abspielt, nicht von dem elektromagnetischen Felde erreicht wird. Dann verschwindet nämlich auf der Fläche f der Vektor $\mathfrak{T}$, der ja durch die daselbst herrschenden Feldstärken bestimmt ist. Es fällt demnach das erste Glied im Ausdruck (19) fort, und die elektromagnetische Gesamtkraft wird

$$(21) \qquad \mathfrak{K} = -\frac{d\mathfrak{G}}{dt}.$$

Die Gesamtkraft, welche das elektromagnetische Feld auf ein Körpersystem ausübt, ist gleich der zeitlichen Abnahme der elektromagnetischen Bewegungsgröße des gesamten Feldes.

Das System, welches aus den Körpern und dem gesamten elektromagnetisehen Felde gebildet ist, können wir als ein in elektromagnetischer Hinsicht abgeschlossenes System bezeichnen. Für ein solches nimmt auch die Energiegleichung (11) eine vereinfachte Form an, da eine Ausstrahlung durch die Begrenzungsfläche f hindurch nicht in Betracht zu ziehen ist. Es wird die gesamte Arbeit der elektromagnetischen Kräfte

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{dW}{dt}. \tag{22}$$

Diese Relation ist es, welche die Bezeichnung des durch (12) definierten Skalars W als „elektromagnetische Energie" rechtfertigt. In entsprechender Weise rechtfertigt die Relation (21) die Bezeichnung des durch (20) definierten Vektors $\mathfrak{G}$ als „elektromagnetische Bewegungsgröße" oder „elektromagnetischer Impuls" des Feldes.

Ist E die gesamte Energie der wägbaren Körper des abgeschlossenen Systemes, so ist der Zuwachs von E der Arbeit der elektromagnetischen Kräfte gleich; es folgt demnach aus (22)

$$E + W = \text{Constans}. \tag{22a}$$

Die Summe aus der Energie der wägbaren Körper und der elektromagnetischen Energie des Feldes ist für ein abgeschlossenes System konstant.

Dieser allgemeinen Fassung des Energieprinzipes können wir eine allgemeine Fassung des Impulssatzes gegenüberstellen. Nach den Lehren der Mechanik ist die zeitliche Zunahme des Gesamtimpulses $\mathfrak{B}$ der wägbaren Massen der Resultierenden der äußeren Kräfte gleich. Da die mechanischen Wechselwirkungen dem Prinzipe von Wirkung und Gegenwirkung Genüge leisten, so liefern sie zu der resultierenden Kraft keinen Beitrag. Es besagt daher der Impulssatz: Die zeitliche Änderung des mecha-

nischen Impulses $\mathfrak{B}$ ist gleich der resultierenden elektromagnetischen Kraft $\mathfrak{K}$:

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \mathfrak{K}.$$

Setzen wir hier für $\mathfrak{K}$ den in (21) erhaltenen Ausdruck ein und bringen $\mathfrak{G}$ auf die andere Seite, so erhalten wir

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{G} = \text{Constans}. \tag{23}$$

Die Summe aus dem mechanischen Impulse der wägbaren Körper und dem elektromagnetischen Impulse des Feldes ist für ein abgeschlossenes System konstant.

Der so verallgemeinerte Impulssatz ist für das Folgende von fundamentaler Bedeutung. Der gegebene Beweis zeigt, daß die Einführung des elektromagnetischen Impulses ebensowenig eine neue Hypothese darstellt wie die Einführung einer elektromagnetischen Energie. Es handelt sich hier wie dort nur um einen zweckmäßigen Ausdruck gewisser Folgerungen, die aus dem Ausdrucke der elektromagnetischen Kraft (V) im Verein mit den Feldgleichungen (I) bis (IV) der Elektronentheorie fließen. Wenn nun auch diese Ausdrucksweise der in der Mechanik gebräuchlichen nachgebildet ist, so führt doch, wie schon am Schlusse des ersten Bandes hervorgehoben wurde, die Elektronentheorie zu Folgerungen, welche den Axiomen der Newtonschen Mechanik widersprechen.

Die an den wägbaren Körpern angreifenden elektromagnetischen Kräfte der Lorentzschen Theorie befolgen nicht das dritte Axiom der Newtonschen Mechanik.

Wenn z. B. ein Körper Licht in einer bestimmten Richtung, etwa vermittelst eines Hohlspiegels, auszusenden beginnt, so erfährt die elektromagnetische Bewegungsgröße des Raumes einen Zuwachs. Der Gleichung (21) gemäß wird das Licht auf den emittierenden Körper eine Kraft ausüben. Diese Wirkung wird erst dann durch eine Gegenwirkung kompensiert werden, wenn das entsandte Licht von anderen Körpern ab-

sorbiert wird, und das findet wegen der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes erst nach einer endlichen Zeit statt. Bis dahin bleibt die Bewegungsgröße der Körper ebenso wie die Energie gewissermaßen latent, sie ist in elektromagnetische Bewegungsgröße verwandelt worden.

Daß der Satz von actio und reactio, in dem Sinne der Newtonschen Mechanik gefaßt, von den elektromagnetischen Kräften der Lorentzschen Theorie verletzt wird, ist von H. Poincaré als Einwand gegen diese Theorie geltend gemacht worden[46]). Indessen wird man diesen Einwand nur dann als stichhaltig ansehen, wenn man die Axiome der alten Mechanik als a priori gültig betrachtet. Sieht man hingegen die Physik als eine Wissenschaft an, deren Prinzipien der fortschreitenden Erfahrung anzupassen sind, so wird man sich durch jenen Einwand nicht beirren lassen. Man wird vielmehr die Mechanik des elektromagnetischen Feldes auf den erweiterten Impulssatz (23) begründen und wird untersuchen, ob dieser Satz Folgerungen ergibt, die mit der Erfahrung übereinstimmen; ist dies der Fall, so sind nicht die Grundlagen der Elektronentheorie, sondern die Axiome der alten Mechanik zu revidieren.

Das ist der Weg, der in den folgenden Abschnitten beschritten werden soll; wir werden zeigen, daß sowohl für die Theorie der Konvektionsstrahlung wie für diejenige der Wellenstrahlung die Einführung der durch den Strahlvektor bestimmten elektromagnetischen Bewegungsgröße fruchtbar ist, und werden in der Bestätigung der so gewonnenen Ergebnisse durch das Experiment eine Rechtfertigung der Grundhypothesen der Elektronentheorie erblicken dürfen.

Nach (18) ist die Dichte $\mathfrak{g}$ der elektromagnetischen Bewegungsgröße dem durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit dividierten Strahlvektor $\mathfrak{S}$ gleich zu setzen. Für eine ebene Lichtwelle weist also der Vektor $\mathfrak{g}$ in Richtung der Wellennormalen; da der Betrag S des Strahlvektors der Energie gleich ist, die in der Sekunde auf die Flächeneinheit einer senkrecht zum Strahle gestellten Fläche fällt, und

da diese Energie einen Zylinder von der Höhe c erfüllt, so ist

$$\frac{1}{c^2} S \cdot c = \frac{S}{c}$$

der Betrag der in der Sekunde auf eine ruhende Fläche fallenden Bewegungsgröße. Die pro Sekunde auffallende Bewegungsgröße einer ebenen Lichtwelle ist also gleich der pro Sekunde auffallenden Energie, dividiert durch die Lichtgeschwindigkeit, oder gleich der Energiedichte.

Fällt nun die Welle auf eine ruhende schwarze Fläche, welche die elektromagnetische Energie der Welle in Wärme verwandelt, so wird auch die elektromagnetische Bewegungsgröße vernichtet und in mechanische Bewegungsgröße verwandelt. Mit anderen Worten, das Licht übt auf die absorbierende Fläche einen Druck aus. Der Lichtdruck beträgt für eine senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung gestellte schwarze Fläche $\frac{S}{c}$; er ist der Energiedichte der Welle gleich. Er wirkt auf die absorbierende schwarze Fläche in Richtung des auffallenden Strahles.

Eine entsprechende, der Strahlrichtung entgegenweisende Druckkraft muß wirksam werden, wenn das Licht von der Lichtquelle in den Raum hinausgesandt und dadurch elektromagnetische Bewegungsgröße erzeugt wird.

Wir haben hier die Ableitung des Lichtdruckes an den zweiten Term im Ausdrucke (19) der resultierenden elektromagnetischen Kraft angeknüpft, welcher die Bewegungsgröße enthält. Den ersten Term beseitigten wir, indem wir die Bewegungsfläche f des Feldes beliebig weit fortrücken ließen. Wir können nun auch anders verfahren. Wir können die Fläche so legen, daß sie sich unmittelbar an den Körper anschmiegt, auf den die gesuchte elektromagnetische Kraft wirkt. Dann sind im allgemeinen beide Glieder zu berücksichtigen, sowohl die von den Maxwellschen Spannungen ausgeübte Kraft als auch die Rückwirkung der elektromagnetischen Bewegungs-

größe, die ins Innere des Körpers tritt. In manchen Fällen indessen fällt das zweite Glied fort. Haben wir es beispielsweise mit einem Körper zu tun, der mit einer schwarzen, das Licht vollkommen absorbierenden Hülle bedeckt ist, so tritt von außen her kein Licht und keine elektromagnetische Bewegungsgröße in den Körper. Es wird die Energie des Lichtes bereits an der Oberfläche in Wärme verwandelt. Hier erhält man den vollständigen Wert der vom Lichte ausgeübten Kraft, indem man ausschließlich die Oberflächenkraft $\mathfrak{T}$ der Maxwellschen Spannungen in Rechnung zieht.

In einer ebenen Lichtwelle steht der elektrische Vektor senkrecht auf dem magnetischen; die elektrische Energiedichte ist der magnetischen gleich. Der Faraday-Maxwellsche Längszug der elektrischen Kraftlinien hebt den ihm parallelen magnetischen Querdruck, der Längszug der magnetischen Kraftlinien den entsprechenden elektrischen Querdruck auf; denn diese Druck- bzw. Zugspannungen sind (vgl. I, §. 97) der elektrischen bzw. der magnetischen Energiedichte gleich. Parallel der Strahlrichtung hingegen, die sowohl auf $\mathfrak{E}$ wie auf $\mathfrak{H}$ senkrecht steht, verstärken sich die beiden Querdrucke und ergeben einen Druck auf eine senkrecht gestellte schwarze Fläche, der gleich der elektromagnetischen Energiedichte ist. Das Resultat dieser Betrachtung führt zu demselben Werte des Lichtdruckes, wie die obige Ableitung aus der elektromagnetischen Bewegungsgröße.

Maxwell selbst war es, der aus seinem Spannungssysteme zuerst den Lichtdruck ableitete. In den letzten Jahren ist es den Bemühungen geschickter Experimentatoren, nämlich P. Lebedew[26]) sowie E. F. Nichols und G. F. Hull[41]) gelungen, experimentell den Lichtdruck als vorhanden nachzuweisen. Auf die Beziehungen des Strahlungsdruckes zur Theorie der Wärmestrahlung kommen wir weiter unten zurück.

Wir wollen schließlich noch zeigen, daß der zweite Impulssatz (vgl. I, § 12) sich in entsprechender Weise verallgemeinern läßt wie der erste. Wir berechnen das resultierende Mo-

ment der elektromagnetischen Kräfte, die auf einen gegebenen Bereich v wirken:

$$\mathfrak{N} = \int dv [\mathfrak{r}, \varrho \mathfrak{F}]. \tag{24}$$

Wir verstehen unter $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor, der von einem im Raume festen Punkte aus zu konstruieren ist. Auf diesen festen Momentenpunkt ist das Moment der elektromagnetischen Kräfte bezogen.

Durch Einführung der Ausdrücke (16) ergibt sich beispielsweise für die x-Komponente des Vektors $\mathfrak{N}$

$$\mathfrak{N}_x = \int dv \{ y \cdot \varrho \mathfrak{F}_z - z \cdot \varrho \mathfrak{F}_y \}$$

$$= \int dv \left\{ y \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right) - z \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right) \right\}$$

$$- \int dv \left\{ y \frac{\partial \mathfrak{g}_z}{\partial t} - z \frac{\partial \mathfrak{g}_y}{\partial t} \right\}.$$

Das von den Maxwellschen Spannungen herrührende Volumintegral formen wir auf Grund des Gaußschen Satzes um, wobei wir die aus (15) folgende Beziehung beachten

$$Y_y = \frac{1}{4\pi} \left\{ \mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_z + \mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_z \right\} = Z_y,$$

und erhalten das über die Begrenzungsfläche f erstreckte Integral

$$\int df \{ y \mathfrak{T}_z - z \mathfrak{T}_y \},$$

wobei $\mathfrak{T}_y$, $\mathfrak{T}_z$ Komponenten des durch (17) bestimmten Vektors $\mathfrak{T}$ sind.

Dieser erste Term im Ausdruck von $\mathfrak{N}_x$ stellt die x-Komponente des statischen Momentes der an der Begrenzungsfläche angreifenden Flächenkraft $\mathfrak{T}$ dar.

Das zweite Integral im Ausdruck von $\mathfrak{N}_x$ hingegen hängt mit der x-Komponente des statischen Momentes der über das Feld mit der Dichte $\mathfrak{g}$ verteilten elektromagnetischen Bewegungsgröße zusammen. Dieses Moment ist

$$\mathfrak{D} = \int dv [\mathfrak{r} \mathfrak{g}]. \tag{25}$$

Wir können es, nach Analogie des Impulsmomentes $\mathfrak{U}$ wägbarer Massen (vgl. I, S. 34), als „elektromagnetisches Impulsmoment" bezeichnen; wir beziehen es, ebenso wie das Kraftmoment $\mathfrak{N}$, auf einen festen Bezugspunkt, so daß $\mathfrak{r}$ von der Zeit unabhängig wird. Alsdann gilt

$$\frac{d\mathfrak{Y}_x}{dt} = \int dv \left\{ y \frac{\partial \mathfrak{g}_z}{\partial t} - z \frac{\partial \mathfrak{g}_y}{\partial t} \right\}.$$

Wir erhalten daher schließlich

$$\mathfrak{N} = \int df [\mathfrak{r}\mathfrak{T}] - \frac{d\mathfrak{Y}}{dt}. \tag{26}$$

Diese Relation entspricht vollkommen der Relation (19). Sie stellt das resultierende Kraftmoment $\mathfrak{N}$ dar als Vektorsumme zweier Glieder: des resultierenden Momentes der an der Oberfläche des Bereiches angreifenden Flächenkraft $\mathfrak{T}$ der Maxwellschen Spannungen und der zeitlichen Abnahme des elektromagnetischen Impulsmomentes.

Rücken wir wieder die Begrenzungsfläche f des Feldes so weit ab, daß auf ihr die Feldstärken gleich Null sind, so wird

$$\mathfrak{N} = -\frac{d\mathfrak{Y}}{dt}. \tag{26a}$$

Das resultierende Kräftepaar, welches das elektromagnetische Feld auf ein Körpersystem ausübt, ist gleich der zeitlichen Abnahme des elektromagnetischen Impulsmomentes des gesamten Feldes.

Da die Kräftepaare, welche die Körper infolge ihrer mechanischen Wechselwirkung aufeinander ausüben, dem Prinzipe von Wirkung und Gegenwirkung Genüge leisten, so ist die zeitliche Änderung des gesamten Impulsmomentes $\mathfrak{U}$ der wägbaren Massen dem resultierenden Momente der elektromagnetischen Kräfte gleich zu setzen. Aus

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} = \mathfrak{N}$$

folgt aber nach (26a) sofort

$$\mathfrak{U} + \mathfrak{Y} = \text{Constans}. \tag{27}$$

Die Summe aus dem mechanischen Impulsmomente der wägbaren Körper und dem elektromagnetischen Impulsmomente des Feldes ist für ein abgeschlossenes System konstant.

Damit haben wir auch den verallgemeinerten zweiten Impulssatz aus den Grundgleichungen der Elektronentheorie hergeleitet. Aus ihm folgt für die Kräftepaare dasselbe, was aus (23) für die elektromagnetischen Wechselwirkungen der Körper bezüglich der Kräfte folgte: Die Kräftepaare, welche die Körper infolge ihrer elektromagnetischen Wechselwirkung aufeinander ausüben, widersprechen im allgemeinen dem Prinzipe von Wirkung und Gegenwirkung.

Die verallgemeinerten Impulssätze (23) und (27) und die verallgemeinerte Energiegleichung (22a) sind die Grundlagen, auf denen die Mechanik des elektromagnetischen Feldes sich aufbaut.

§ 6. Die elektromagnetischen Potentiale.

Das Grundproblem der Elektronentheorie können wir folgendermaßen formulieren: Gegeben sei der Anfangszustand des Feldes zur Zeit $t = 0$ und außerdem, für $t > 0$, die Lage und die Bewegung der Elektrizität. Welches ist das elektromagnetische Feld? Es handelt sich also um die Integration der Feldgleichungen (I) bis (IV), bei gegebener anfänglicher Verteilung der Felder $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, wenn ϱ und $\mathfrak{k}$ für $t > 0$ als Funktionen von Ort und Zeit gegeben sind. Ist das elektromagnetische Feld bekannt, so ist durch (V) die elektromagnetische Kraft bestimmt, welche das Feld auf die Elektronen ausübt.

Für stationäre Zustände, wo die Differentialquotienten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ nach der Zeit in (I) und (II) fortfallen, vereinfacht sich die Bestimmung des Feldes. Es wird das elektrische Feld von dem magnetischen unabhängig; das wirbelfreie elektrische Feld ist durch die Quellenverteilung ϱ, das quellenfreie magnetische Feld durch die Wirbelverteilung $\mathfrak{k}$ bestimmt. Die

Integration der Gleichungen, die einerseits $\mathfrak{E}$ mit ϱ, andererseits $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{i}$ verknüpfen, läßt sich in diesem Falle auf Grund der allgemeinen Theorie der Vektorfelder lösen, die im ersten Abschnitte des ersten Bandes dargelegt wurde. Das konstante elektrische Feld wird aus dem elektrostatischen Potentiale, das magnetische Feld des stationären elektrischen Stromes aus dem Vektorpotentiale abgeleitet. Durch Einführung dieser Hilfsgrößen läßt sich die Integration der Feldgleichungen in übersichtlicher Weise durchführen, wie wir im ersten Bande gesehen haben.

Es liegt der Versuch nahe, das allgemeine Integrationsproblem, das jetzt vorliegt, durch Einführung ähnlicher Hilfsgrößen zu vereinfachen. Die vierte Grundgleichung lehrt, daß $\mathfrak{H}$ stets quellenfrei ist; wir genügen ihr, indem wir

$$\mathfrak{H} = \operatorname{curl} \mathfrak{A} \tag{28}$$

setzen. Von diesem allgemeineren Vektorpotential dürfen wir freilich nicht verlangen, daß seine Divergenz wie diejenige des Vektorpotentiales des stationären Feldes (I, § 28) allgemein gleich Null ist.

Die Einführung von (28) in die zweite Grundgleichung ergibt

$$\operatorname{curl} \left\{ \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right\} = 0.$$

Es muß demnach $\mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$ als negativer Gradient eines Skalars Φ sich darstellen lassen; daraus folgt für $\mathfrak{E}$ der Ausdruck

$$\mathfrak{E} = - \nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}. \tag{29}$$

Für konstante Felder fällt der Differentialquotient von $\mathfrak{A}$ nach der Zeit fort und Φ reduziert sich auf das elektrostatische Potential.

Den Grundgleichungen (II) und (IV) haben wir genügt, indem wir $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ durch (28) und (29) darstellten. Es handelt sich nun darum, den Skalar Φ und den Vektor $\mathfrak{A}$ so zu bestimmen, daß auch die Grundgleichungen (I) und (III)

erfüllt sind. Wir erhalten als Bedingung hierfür die beiden Differentialgleichungen

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathfrak{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial t^2} + \nabla\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 4\pi\mathfrak{k},$$

$$-\operatorname{div}\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathfrak{A} \qquad = 4\pi\varrho.$$

Ziehen wir die Rechnungsregeln (ξ) und (ϱ) unserer Formelzusammenstellung (Bd. I, S. 453) heran, so können wir die zweite dieser Gleichungen schreiben

$$-\nabla^2\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathfrak{A} = 4\pi\varrho,$$

und die erste

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathfrak{A} + \nabla\left\{\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathfrak{A}\right\} = 4\pi\mathfrak{k}.$$

Wir erfüllen beide Gleichungen, indem wir für Φ und $\mathfrak{A}$ die partiellen Differentialgleichungen vorschreiben:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathfrak{A} = 0, \tag{30}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \nabla^2\Phi = 4\pi\varrho, \tag{30a}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathfrak{A} = 4\pi\mathfrak{k}. \tag{30b}$$

Für ein stationäres Feld werden Φ und $\mathfrak{A}$ unabhängig voneinander; Φ geht in das skalare Potential des elektrostatischen Feldes, $\mathfrak{A}$ in das Vektorpotential des magnetischen Feldes über. Die allgemeinen, durch die Differentialgleichungen (30, 30a, 30b) definierten Potentiale bezeichnen wir als „elektromagnetische Potentiale“, und zwar nennen wir Φ das „skalare elektromagnetische Potential“, $\mathfrak{A}$ das „elektromagnetische Vektorpotential“. Durch diese Benennung bringen wir zum Ausdruck, daß die allgemeineren Potentiale dann zur Verwendung gelangen, wenn es sich um einen zeitlich veränderlichen elektromagnetischen Vorgang handelt, bei welchem elektrisches und magnetisches Feld durch die Grundgleichungen miteinander verkettet sind.

Wir werden uns zunächst mit der Integration der Differentialgleichungen (30a, b) beschäftigen, in denen Φ und $\mathfrak{A}$ getrennt auftreten. Wir werden uns dann davon überzeugen, daß die erhaltene Lösung von (30a, b) auch (30) befriedigt. Wir sehen jetzt schon ohne weiteres ein, daß die rechten Seiten von (30a, b) nicht unabhängig voneinander sind; in der Tat, aus (I) und (III) folgt

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{i} = 0. \tag{30c}$$

Diese Gleichung sagt aus, daß die pro Zeiteinheit in ein Volumelement eintretende Menge von Elektrizität dem Zuwachs der elektrischen Dichte entspricht, d. h. daß Elektrizität nicht neugeschaffen oder vernichtet werden kann. Diese „Kontinuitätsbedingung der Elektrizität" ist es, die ϱ und $\mathfrak{i}$ miteinander verknüpft. Die Abhängigkeit der rechten Seiten von (30a) und (30b) bringt es, wie wir weiter unten sehen werden, mit sich, daß die elektromagnetischen Potentiale der einschränkenden Bedingung (30) Genüge leisten.

Wir gehen jetzt dazu über, die Differentialgleichung des skalaren elektromagnetischen Potentiales zu integrieren. Es ist zweckmäßig, eine neue Variable

$$l = ct$$

einzuführen; diese ist nichts anderes, als der in der Zeit t von einer Lichtwelle zurückgelegte Weg. Dann schreibt sich (30a)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial l^2} - \nabla^2 \Phi = 4\pi\varrho. \tag{31}$$

Wir denken uns, zur Zeit $t = 0$, Φ und $\frac{\partial \Phi}{\partial l}$ als Funktionen des Ortes gegeben, also etwa

$$\Phi = f(x, y, z) \text{ für } l = 0. \tag{31a}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = g(x, y, z) \text{ für } l = 0. \tag{31b}$$

Außerdem ist natürlich, für $l > 0$, ϱ als Funktion von Zeit und Ort gegeben.

Es ist unser Ziel, für positive Zeiten Φ als Funktion von Ort und Zeit zu ermitteln; dieses Ziel haben wir erreicht, wenn es uns gelingt, für einen beliebigen Aufpunkt Φ als Funktion von l zu berechnen. Wir greifen einen Aufpunkt P heraus und konstruieren um P als Mittelpunkt eine Schar von Kugeln mit dem veränderlichen Radius r. Wir verstehen unter $d\omega$ den körperlichen Winkel, unter dem das Flächenelement $r^2 d\omega$ einer solchen Kugel vom Mittelpunkte P aus gesehen wird. Die Funktion Φ, welche der partiellen Differentialgleichung (31) genügen soll, ist eine Funktion von vier Variabeln: r, l und zwei Winkeln; die letzteren beiden Variabeln gehen in den Ausdruck von $d\omega$ ein. Die nunmehr einzuführende Hilfsfunktion

$$\Omega = \frac{r}{4\pi}\int \Phi d\omega \tag{32}$$

hängt mithin nur von den Variabeln r und l ab; sie ergibt, durch r dividiert, den für eine Kugel vom Radius r berechneten Mittelwert von Φ. Wir wollen die Gleichung (31) in eine partielle Differentialgleichung für Ω umformen.

Wir wenden zu diesem Zwecke den Gaußschen Satz auf eine jener Kugeln an. Das über ihr Inneres erstreckte Integral von $\nabla^2 \Phi = \operatorname{div} \nabla \Phi$ ist diesem Satze zufolge gleich dem über die Oberfläche erstreckten Integral der Normalkomponente $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ des Vektors $\nabla \Phi$; demnach gilt

$$\int_0^r dr r^2 \int \nabla^2 \Phi d\omega = r^2 \int \frac{\partial \Phi}{\partial r} d\omega = r^2 \frac{\partial}{\partial r} \int \Phi d\omega .$$

Durch Differentiation nach r folgt

$$r^2 \int \nabla^2 \Phi d\omega = \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \int \Phi d\omega = 2r \frac{\partial}{\partial r} \int \Phi d\omega + r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \int \Phi d\omega,$$

oder

$$r \int \nabla^2 \Phi d\omega = 2 \frac{\partial}{\partial r} \int \Phi d\omega + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} \int \Phi d\omega = \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \int \Phi d\omega .$$

Wir erhalten also

$$\frac{r}{4\pi}\int \nabla^2 \Phi \, d\omega = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2}. \tag{32a}$$

Dividieren wir nun (31) durch $4\pi r$ und integrieren über eine Kugelfläche vom Radius r, so folgt

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial l^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} = \chi(r, l), \tag{33}$$

wo abkürzungsweise

$$\chi(r, l) = r \int \varrho \, d\omega \tag{33a}$$

gesetzt ist. Da ϱ als Funktion von Zeit und Ort gegeben ist, so ist χ für $l \geqq 0$ und $r \geqq 0$ als bekannt anzusehen. Ferner sind auf Grund von (31a, b)

$$\left.\begin{aligned} &(33\text{b}) \quad \Omega = \frac{r}{4\pi}\int f(x, y, z)\, d\omega = F(r) \\ &(33\text{c}) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial l} = \frac{r}{4\pi}\int g(x, y, z)\, d\omega = G(r) \end{aligned}\right\} \text{ für } \left\{\begin{aligned} &l = 0 \\ &r \geqq 0 \end{aligned}\right.$$

gegeben.

Ist es gelungen, die Hilfsgleichung (33) zu lösen, so ist der gesuchte Wert von Φ im Mittelpunkte P der Kugelschar unschwer zu ermitteln. Er ist nach (32)

$$\Phi(0, l) = \lim_{r=0} \left(\frac{\Omega}{r}\right). \tag{34}$$

Das Problem, Φ für einen beliebigen Aufpunkt zu berechnen, ist somit auf die Aufgabe zurückgeführt, die Hilfsgleichung (33) unter den angegebenen Bedingungen zu integrieren.

§ 7. Integration einer Hilfsgleichung.

Die Funktionen $\chi(r, l)$, $F(r)$ und $G(r)$ sind durch (33a, b, c) zwar für positive Werte von r definiert, aber nicht für negative; für $r = 0$ verschwinden sie. Es steht uns somit frei, die Definition dieser Funktionen folgendermaßen auf negative Werte von r auszudehnen:

(35) $\chi(-r, l) = -\chi(+r, l),$

(35a) $F(-r) = -F(+r),$

(35b) $G(-r) = -G(+r).$

Auf Grund dieser Daten soll nun die Aufgabe behandelt werden, die Differentialgleichung

(36) $$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial l^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} = \chi(r, l)$$

zu integrieren, d. h. $\Omega(r, l)$ für $l > 0$ und für beliebige positive und negative Werte von r zu berechnen, wenn

(36a) $$\Omega = F(r)$$

(36b) $$\frac{\partial \Omega}{\partial l} = G(r)$$

für $l = 0$

gegeben sind.

Wir erledigen die gestellte Aufgabe, indem wir das Riemannsche Integrationsverfahren auf die nichthomogene partielle Differentialgleichung (36) anwenden.*)

Wir denken uns die unabhängigen Veränderlichen r und l als Abszisse und Ordinate aufgetragen. Die Anwendung des Stokesschen Satzes auf ein beliebiges Flächenstück der (r, l)-Ebene ergibt

$$\iint dr\, dl \left\{ \frac{\partial \mathfrak{Z}_l}{\partial r} - \frac{\partial \mathfrak{Z}_r}{\partial l} \right\} = \int ds\, \mathfrak{Z}_s.$$

Dabei stellt $\mathfrak{Z}$ einen zunächst beliebigen Vektor dar. Das Integral zur Linken ist über das betreffende Flächenstück, das Integral zur Rechten über die Begrenzungskurve zu erstrecken, derart, daß der Umlaufssinn einer positiven Drehung um die dritte, der r- und l-Achse sich zuordnende Achse eines rechtshändigen Koordinatensystemes entsprechen würde. Wir setzen nun

$$\mathfrak{Z}_r = \frac{\partial \Omega}{\partial l}, \quad \mathfrak{Z}_l = \frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

*) Vgl. hierzu Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Braunschweig 1901. Bd. II, § 90, S. 224 ff. A. Sommerfeld, Enzyklopädie der mathem. Wissensch. II A. Art. 7c. Nr. 13.

und erhalten

$$(37)\qquad \iint dr\,dl\left\{\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}-\frac{\partial^2\Omega}{\partial l^2}\right\}=\int ds\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial s}+\frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{\partial l}{\partial s}\right\}.$$

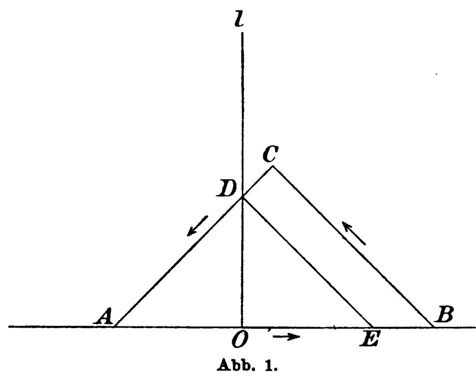


Abb. 1.

Wir wenden diese Formel auf ein gleichschenkliges Dreieck ABC an, dessen Grundlinie AB auf der r-Achse liegt, während die Spitze C auf der Seite der positiven l gelegen ist (vgl. Abb. 1). Es seien a, b die Abszissen der Punkte A, B. Die Winkel der Schenkel AC, BC mit der Grundlinie seien gleich einem halben Rechten, so daß

(37a) $r - l = a$ die Gleichung der Geraden AC,
$r + l = b$ „ „ „ „ BC

ist. Alsdann ist längs AC

$$\frac{\partial r}{\partial s}=\frac{\partial l}{\partial s},$$

hingegen längs BC

$$\frac{\partial r}{\partial s}=-\frac{\partial l}{\partial s}.$$

Auf AB aber ist

$$\frac{\partial l}{\partial s}=0,\quad \frac{\partial r}{\partial s}=1,\quad \text{und, nach (36b),}\quad \frac{\partial\Omega}{\partial l}=G(r).$$

Es ist daher

$$\int_A^B ds\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial s}+\frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{\partial l}{\partial s}\right\}=\int_a^b G(r)\,dr,$$

$$\int_B^C ds\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial s}+\frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{\partial l}{\partial s}\right\}=-\int_B^C ds\frac{\partial\Omega}{\partial s}=\Omega_B-\Omega_C,$$

$$\int_C^A ds\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial s}+\frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{\partial l}{\partial s}\right\}=+\int_C^A ds\frac{\partial\Omega}{\partial s}=\Omega_A-\Omega_C.$$

Folglich wird die rechte Seite von (37)

$$\int_a^b G(r)dr + \Omega_A + \Omega_B - 2\Omega_C.$$

Verstehen wir jetzt unter r, l die Koordinaten des Punktes C, so ist

$$\Omega_C = \Omega(r, l)$$

die gesuchte Funktion.

Der Punkt A hat nach (37a) die Koordinaten

$$a = r - l, 0,$$

der Punkt B hingegen die Koordinaten

$$b = r + l, 0.$$

Aus (36a) folgt daher

$$\Omega_A = \Omega(r - l, 0) = F(r - l),$$
$$\Omega_B = \Omega(r + l, 0) = F(r + l),$$

und es ist die rechte Seite von (37) zu schreiben

$$\int_{r-l}^{r+l} G(r)dr + F(r - l) + F(r + l) - 2\Omega(r, l).$$

Die linke Seite aber wandelt sich, durch Einführung der partiellen Differentialgleichung (36), in das über das Dreieck ABC erstreckte Flächenintegral der Funktion $-\chi(r, l)$ um. Es wird also schließlich

$$(38)\quad 2\Omega(r, l) = F(r - l) + F(r + l) + \int_{r-l}^{r+l} G(r)dr + \iint_{ABC} \chi(r, l)\,dr\,dl.$$

Damit ist die Integration der Hilfsgleichung (36) in allgemeinster Weise durchgeführt.

Die Funktionen $F(r)$, $G(r)$, $\chi(r, l)$ waren zunächst nur für positive Werte von r gegeben. Auf negative Werte dieser Variabeln wurde ihre Definition durch die Gleichungen (35, 35a, b) ausgedehnt. Wir können daher schreiben

$$F(r - l) = -F(l - r),$$

$$\int_{r-l}^{r+l} G(r)dr = \int_0^{r+l} G(r)dr - \int_0^{l-r} G(r)dr = \int_{l-r}^{l+r} G(r)dr.$$

Was aber das über das Dreieck ABC der Abb. 1 erstreckte Flächenintegral anbelangt, so ist dasselbe nach (35)

$$\iint_{ABC} \chi(r,l)\,dr\,dl = \iint_{OBCD} \chi(r,l)\,dr\,dl - \iint_{OED} \chi(r,l)\,dr\,dl.$$

Dabei ist OED das Dreieck, welches dem auf der Seite der negativen r gelegenen Teile OAD des Dreieckes ABC spiegelbildlich (in bezug auf die l-Achse) entspricht. Es bleibt also schließlich nur das über den Streifen $BCDE$ erstreckte Integral von $\chi(r, l)$ übrig:

$$\iint_{ABC} \chi(r,l)\,dr\,dl = \iint_{BCDE} \chi(r,l)\,dr\,dl.$$

Demnach erhalten wir

$$\text{(38a)} \quad \frac{\Omega(r,l)}{r} = \frac{F(l+r)-F(l-r)}{2r} + \frac{1}{2r}\cdot\int_{l-r}^{l+r} G(r)\,dr + \frac{1}{2r}\cdot\iint_{BCDE} \chi(r,l)\,dr\,dl.$$

Der Limes, dem dieser Ausdruck mit verschwindendem r zustrebt, bestimmt nach (34) den gesuchten Wert des skalaren Potentiales im Aufpunkte.

Der Grenzwert der beiden ersten Glieder läßt sich sofort angeben; es ist

$$\text{(38b)} \quad \lim_{r=0} \left\{\frac{F(l+r)-F(l-r)}{2r}\right\} = F'(l),$$

$$\text{(38c)} \quad \lim_{r=0} \frac{1}{2r}\cdot\int_{l-r}^{l+r} G(r)\,dr = G(l).$$

Was aber das dritte Glied anbelangt, so ist zu beachten, daß r die Abszisse des Punktes C in Abb. 1 ist. Dem Grenzübergang zu verschwindendem r entspricht ein Hereinrücken des Punktes C in die l-Achse, wobei $OB = l$ wird. Ist λ die Abszisse eines Punktes der Geraden CB, so ist in der Grenzlage seine Ordinate gleich $(l - \lambda)$. Folglich gilt in der Grenzlage des Dreieckes für die Punkte der Geraden CB

$$\chi(r,l) = \chi(\lambda, l-\lambda), \quad \text{wo} \quad 0 \leqq \lambda \leqq l.$$

Zu einem dieser Geraden anliegenden schmalen Streifen von der Breite $CD = r \cdot \sqrt{2}$ wird mit verschwindendem r das Gebiet $BCDE$, über welches das Flächenintegral in (38a) zu erstrecken war. Wir erhalten demnach

$$\lim_{r=0} \frac{1}{2r} \iint\limits_{BCDE} \chi(r, l)\, dr\, dl = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int\limits_{C}^{B} \chi(\lambda, l - \lambda)\, ds;$$

dabei stellt ds ein Element der Geraden CB vor, die unter 45^0 gegen die Abszissenachse geneigt ist; die Variable λ aber war die Abszisse der Punkte von CB. Demnach ist

$$ds = d\lambda \cdot \sqrt{2},$$

und es wird

$$\lim_{r=0} \frac{1}{2r} \cdot \iint\limits_{BCDE} \chi(r, l)\, dr\, dl = \int\limits_{0}^{l} d\lambda\, \chi(\lambda, l - \lambda). \tag{38d}$$

Die Grenzwerte (38b, c, d) der drei Glieder in (38a) zusammenfassend, erhalten wir

$$\lim_{r=0} \left\{ \frac{\Omega(r, l)}{r} \right\} = F'(l) + G(l) + \int\limits_{0}^{l} d\lambda\, \chi(\lambda, l - \lambda).$$

Der Wert der gesuchten Funktion Φ in dem Aufpunkte P wird daher, mit Rücksicht auf (33a) und (34),

$$\Phi(0, l) = F'(l) + G(l) + \int\limits_{0}^{l} \lambda\, d\lambda \int d\omega\, \varrho\,(\lambda, l - \lambda). \tag{39}$$

Nunmehr haben wir die Integration der für das skalare elektromagnetische Potential geltenden partiellen Differentialgleichung (31) durchgeführt.*) Die Funktionen F und G bestimmen sich, gemäß (33b, c), aus den gegebenen Anfangswerten (31a, b) von Φ und $\frac{\partial \Phi}{\partial l}$. Die beiden ersten Glieder von (39)

*) Die gegebene Ableitung schließt sich an die von H. Weber für den Fall $\varrho = 0$ angewandte Methode an. Vgl. Riemann-Weber l. c. Bd. II, § 120, S. 302 ff. und M. Abraham. Acc. dei Lincei (5) 14^1, S. 7, 1905.

formulieren demnach den Einfluß des Anfangszustandes, während das dritte Glied ausgewertet werden kann, wenn die Elektrizitätsverteilung in ihrer Abhängigkeit von Zeit und Ort gegeben ist.

§ 8. Die Fortpflanzung elektromagnetischer Störungen.

Die Formel (39) löst die partielle Differentialgleichung (30a); sie bestimmt das skalare elektromagnetische Potential Φ, wenn die Anfangswerte von Φ und $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ bekannt sind, und wenn weiterhin die Dichte ϱ der Elektrizität als Funktion der Zeit gegeben ist. Die Differentialgleichung (30b) für das elektromagnetische Vektorpotential $\mathfrak{A}$ stimmt mit (30a) formal überein. Wir könnten sie mithin in ganz entsprechender Weise lösen, wenn die Anfangswerte von $\mathfrak{A}$ und $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$ bekannt wären, und wenn weiterhin die Verteilung des Konvektionsstromes $\mathfrak{k}$ als Funktion der Zeit gegeben wäre. Es bliebe, um die so erhaltene Lösung für das im Eingange des § 6 aufgestellte Problem nutzbar zu machen, nur noch übrig, anzugeben, wie der Anfangszustand des Feldes mit den Anfangswerten der elektromagnetischen Potentiale und ihrer zeitlichen Änderungen verknüpft ist.

Wir wollen indessen, um uns nicht in Allgemeinheiten zu verlieren, über den Anfangszustand des Feldes eine ganz bestimmte Voraussetzung machen. Wir wollen annehmen, zur Zeit $t = 0$ sei im ganzen Raume das Feld ein elektrostatisches gewesen. Das elektrostatische Feld ist durch die Verteilung der ruhenden Elektrizität bestimmt. Es kann daher die zu lösende Aufgabe jetzt folgendermaßen ausgesprochen werden: *Gegeben sei die anfängliche Verteilung der ruhenden Elektrizität, und weiterhin die Verteilung der Elektrizität und des Konvektionsstromes. Welches ist der Verlauf der elektromagnetischen Störung?*

Für das anfangs herrschende elektrostatische Feld geht das skalare elektromagnetische Potential Φ in das elektrostatische Potential φ über. Wir wollen sehen, was die Formel (39)

für den Fall ergibt, daß das zur Zeit $t = 0$ bestehende elektrostatische Feld auch weiterhin bestehen bleibt. Alsdann ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{c \partial t} = 0,$$

und es ist, nach (31b) und (33c), die Funktion $G(r)$ identisch gleich Null. Die Funktion $F(r)$ aber wird, nach (31a) und (33b), in diesem Falle gleich dem über die Kugel mit dem Radius r erstreckten Integrale

$$F(r) = \frac{1}{4\pi}\int r \varphi d\omega,$$

demnach wird

$$F'(r) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial (r\varphi)}{\partial r} d\omega.$$

Endlich ist die elektrische Dichte ϱ von der Zeit unabhängig, und daher ist $\varrho(\lambda, l - \lambda) = \varrho(\lambda, 0)$ zu setzen.

Die Formel (39) zeigt nun, wie man den Wert des skalaren Potentiales, zur Zeit t, in irgendeinem Aufpunkte P zu berechnen hat: man konstruiere um P eine Kugel mit dem Radius $l = ct$. Man setze in $F'(r)$ und $G(r)$ an Stelle von r jetzt l, d. h. man berechne den Wert dieser Integrale für die Kugel vom Radius l. Endlich füge man das über das Innere der Kugel zu erstreckende Integral hinzu, zu dem die mit Elektrizität erfüllten Volumelemente Beiträge liefern. Für das elektrostatische Potential ergibt sich auf diese Weise

$$\varphi(0, l) = \frac{1}{4\pi}\int d\omega \left(\frac{\partial (r\varphi)}{\partial r}\right)_{r=l} + \int_0^l \lambda d\lambda \int d\omega \varrho(\lambda, 0). \tag{40}$$

Da das elektrostatische Potential von der Zeit unabhängig ist, so muß die rechte Seite der Gleichung denselben Wert ergeben, welches auch der Radius l der Kugel sein mag. Wir können die Gleichung (40), nach Einführung des Flächenelementes $df = r^2 d\omega$ und des Volumelementes $dv = \lambda^2 d\lambda\, d\omega = r^2 dr\, d\omega$, schreiben

$$\varphi(0, l) = \frac{1}{4\pi}\int df \left\{\frac{\varphi}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right\} + \int \frac{dv \varrho}{r}. \tag{40a}$$

Sie drückt den Wert des elektrostatischen Potentiales im Mittelpunkte einer beliebigen Kugel aus als Summe eines über ihre Oberfläche und eines über ihr Inneres erstreckten Integrales.

Wir wollen noch zeigen, daß diese Formel mit den auf anderem Wege in der Theorie des wirbelfreien Vektorfeldes erhaltenen Beziehungen übereinstimmt. Wir knüpfen dabei an die in Bd. I, § 23 angewandte Methode an, welche sich auf den Greenschen Satz (I., Gl. 76, S. 61) stützt. Es wurde daselbst $\psi = \frac{1}{r}$ gesetzt, und der Greensche Satz alsdann auf ein Gebiet angewandt, das einerseits von einer kleinen, den Aufpunkt P einschließenden Kugel f_0, andererseits von einer beliebigen Fläche f begrenzt war. Die Anwendung des Greenschen Satzes auf dieses Gebiet ergibt:

$$\int df_0 \left\{ \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right\} + \int df \left\{ \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right\}$$

$$= \int dv \left\{ \frac{1}{r} \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \frac{1}{r} \right\}.$$

Als Grenzwert des ersten Gliedes bei verschwindendem Radius der Kugel f_0 ergab sich in I, § 23 der Wert $-4\pi\varphi_0$, während das Volumintegral gleich

$$-4\pi \int \frac{dv\varrho}{r}$$

war. Wir erhalten mithin

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi} \int df \left\{ \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right\} + \int \frac{dv\varrho}{r}. \tag{40b}$$

Lassen wir die Fläche f mit einer Kugel um P zusammenfallen, so ist Differentiation nach n äquivalent mit Differentiation nach r; es geht dann (40b) in (40a) über. Damit haben wir die Formel (40a), die sich hier durch Spezialisierung der allgemeinen, für das elektromagnetische Potential Φ geltenden Formel (39) ergab, auf einem unabhängigen Wege hergeleitet.

Die Formel (40) stellt das elektrostatische Feld dar, welches zur Zeit $t = 0$ herrscht. Ein magnetisches Feld soll zur Zeit $t = 0$ nicht vorhanden sein. Es ist demnach zur Zeit $t = 0$:

$$\Phi = \varphi, \quad \mathfrak{A} = 0.$$

Was aber die Anfangswerte der Ableitungen von Φ und $\mathfrak{A}$ nach der Zeit anbelangt, so folgt aus (29), da ja für

$$t = 0, \quad \mathfrak{E} = -\nabla\varphi$$

sein soll, daß für

$$t = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = 0$$

ist.

Der Anfangswert von $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ aber ist so zu wählen, daß zur Zeit $t = 0$ die Relation (30) erfüllt ist. Dies ergibt, für

$$t = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Auf Grund der Anfangsbedingungen

$$\Phi = \varphi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial l} = 0 \text{ für } l = ct = 0 \tag{41}$$

ergibt die Grundformel (39):

$$\Phi(0, l) = \frac{1}{4\pi}\int d\omega \left(\frac{\partial r \varphi}{\partial r}\right)_{r=l} + \int_0^l \lambda \, d\lambda \int d\omega \, \varrho(\lambda, l - \lambda) \tag{42}$$

als Wert des skalaren elektromagnetischen Potentiales.

Das erste, vom Anfangszustand allein abhängige Glied ist identisch mit dem im Ausdrucke (40) des elektrostatischen Potentiales auftretenden; das erklärt sich daraus, daß die Anfangsbedingungen (41) mit denen des elektrostatischen Feldes übereinstimmen. Der Unterschied gegen (40) liegt in dem von der Elektrizitätsverteilung abhängigen Volumintegral. Dort war auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius λ die durch $\varrho(\lambda, 0)$ gekennzeichnete anfängliche Dichte der Elektrizitätsverteilung in Rechnung zu ziehen, die ja weiterhin nicht abgeändert wurde. Wir könnten dort, im Ausdrucke (40) des elektrostatischen Potentiales, mit demselben Rechte an Stelle von $\varrho(\lambda, 0)$ die gleichzeitige, zur Zeit t im Abstande λ vom Aufpunkt herrschende räumliche Dichte $\varrho(\lambda, l)$ verstehen, oder

auch die räumliche Dichte in irgendeinem, dem Zeitintervalle von $t = 0$ bis $t = \frac{l}{c}$ angehörenden Zeitpunkte; denn in diesem Zeitintervalle sollte die anfängliche Dichte $\varrho(\lambda, 0)$ bestehen bleiben. Hier, im Ausdrucke (42) des elektromagnetischen Potentiales, hingegen handelt es sich um eine zeitlich veränderliche Elektrizitätsverteilung; es ist, auf der Oberfläche der Kugel vom Radius λ, die durch $\varrho(\lambda, l-\lambda)$ gekennzeichnete Dichte in Rechnung zu ziehen, d. h. diejenige, welche zur Zeit $\frac{l-\lambda}{c} = t - \frac{\lambda}{c}$ auf jener Kugelfläche herrschte. Es kommt für das Feld, welches im Aufpunkte P zur Zeit t erregt wird, nicht die gleichzeitige Elektrizitätsverteilung im ganzen Raume in Betracht, sondern für jede der Kugeln diejenige elektrische Dichte, die daselbst zu einer um

$$\tau = \frac{\lambda}{c} \tag{42a}$$

zurückliegenden Zeit bestanden hat. Der zur Zeit $t-\tau$ entsandte Beitrag trifft zur Zeit t im Aufpunkte ein. Wir können τ als „Latenszeit", λ als „Latensweg" bezeichnen. Es folgt das wichtige Ergebnis: Die durch Abänderung der elektrischen Dichte erregte elektromagnetische Störung pflanzt sich nach allen Seiten mit der Geschwindigkeit c im Raume fort.

Wir erhalten das skalare elektromagnetische Potential des durch Abänderung der Elektrizitätsverteilung erregten Feldes, indem wir das elektrostatische Potential (40) des anfänglichen Feldes von dem skalaren Potentiale (42) des abgeänderten Feldes subtrahieren:

$$\Phi(0, l) - \varphi(0, l) = \int_0^l \lambda \, d\lambda \int d\omega \, \{\varrho(\lambda, l-\lambda) - \varrho(\lambda, 0)\}. \tag{43}$$

Was aber das elektromagnetische Vektorpotential anbelangt, so entsprechen, wie wir oben gesehen haben, dem angenommenen Anfangszustande die Anfangsbedingungen

$$\mathfrak{A} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial l} = 0 \quad \text{für} \quad l = ct = 0.$$

Da nun die Differentialgleichung (30b) formal der Gleichung (30a) durchaus entspricht, so erhält man die Komponenten des Vektorpotentiales $\mathfrak{A}$, indem man in (39) ϱ durch die Komponenten des Konvektionsstromes $\mathfrak{k}$ ersetzt und, bei der Auswertung von F und G gemäß (33b, c), $f(xyz)$ und $g(xyz)$ durch die Anfangswerte der Komponenten von $\mathfrak{A}$ und $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial l}$ ersetzt. Unter den obigen speziellen Anfangsbedingungen nun verschwinden die so berechneten Funktionen F und G identisch, und es wird

$$(44) \qquad \mathfrak{A}(0, l) = \int_0^l \lambda d\lambda \int d\omega \mathfrak{k}(\lambda, l - \lambda).$$

Aus den durch (43) und (44) bestimmten elektromagnetischen Potentialen Φ und $\mathfrak{A}$ ist, gemäß (28) und (29), das elektromagnetische Feld zu berechnen, welches durch die Abänderung der Elektrizitätsverteilung und durch den diese Abänderung begleitenden Konvektionsstrom erregt wird.

Um den Beweis, daß die erhaltenen Lösungen der partiellen Differentialgleichangen (30a, b) Integrale der Feldgleichungen I bis IV ergeben, zu Ende zu führen, bedarf es nur noch des Nachweises, daß die Gleichung (30), die Φ und $\mathfrak{A}$ miteinander verknüpft, wirklich besteht. Das ist in der Tat der Fall, falls stets und überall die Kontinuitätsbedingung der Elektrizität (30c):

$$(45) \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial l} + \operatorname{div} \mathfrak{k} = 0$$

erfüllt ist.

Um dies zu zeigen, differentiieren wir zunächst (43) nach l; da $\varphi(0, l)$, der Wert des elektrostatischen Potentiales in einem festen Aufpunkt, von der Zeit unabhängig ist, so gilt

$$\frac{\partial \varphi(0, l)}{\partial l} = 0.$$

Die rechte Seite von (43) hängt in zwiefacher Weise von l ab; erstens insofern, als l die obere Grenze des nach λ ge-

4*

nommenen Integrales ist, zweitens dadurch, daß, für einen bestimmten Punkt des Raumes, ϱ von l abhängt. Die Differentiation nach der oberen Grenze ergibt:

$$l\int d\omega\,\{\varrho\,(l, 0) - \varrho\,(l, 0)\} = 0.$$

Es bleibt also nur der durch Differentiation des ϱ entstehende Ausdruck übrig

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \int_0^l \lambda\, d\lambda \int d\omega \left\{\frac{\partial \varrho}{\partial l}\right\}_{\lambda,\, l-\lambda} \tag{45a}$$

Bei der Differentiation nach l war der Aufpunkt P festzuhalten. Bei der Differentiation nach den Koordinaten ist der Aufpunkt, und mit ihm das ganze Kugelsystem, zu verschieben. Bei Berechnung des Beitrages, den ein in dem Kugelsystem fest zu denkendes Volumelement zum Werte von $\mathfrak{A}_x$ im Aufpunkte liefert, ist der Wert von $\mathfrak{f}_x$ in Rechnung zu ziehen, der in dem Mittelpunkte des jeweils gedeckten Volumelementes des Raumes zur Zeit $\frac{l-\lambda}{c}$ herrschte. Wird nun P um dx parallel der x-Achse verschoben, so ist zugleich das ganze Kugelsystem zu verschieben. Das im Kugelsystem feste Volumelement deckt jetzt ein anderes Volumelement des Raumes, und es ist der Wert von $\mathfrak{f}_x$ in dessen Mittelpunkte zur Zeit $\frac{l-\lambda}{c}$ in Rechnung zu ziehen, d. h. ein um $\frac{\partial \mathfrak{f}_x}{\partial x}\, dx$ größerer Wert als vorhin. So ergibt sich

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \int_0^l \lambda\, d\lambda \int d\omega\,\{\operatorname{div} \mathfrak{f}\}_{\lambda,\, l-\lambda}. \tag{45b}$$

Addieren wir die durch (45a, b) gegebenen Werte von $\frac{\partial \Phi}{\partial l}$ und $\operatorname{div} \mathfrak{A}$ im Aufpunkte P, so erhalten wir

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} + \operatorname{div} \mathfrak{A} = \int_0^l \lambda\, d\lambda \int d\omega \left\{\frac{\partial \varrho}{\partial l} + \operatorname{div} \mathfrak{f}\right\}_{\lambda,\, l-\lambda}. \tag{45c}$$

Die Relation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} + \operatorname{div} \mathfrak{A} = 0 \tag{46}$$

erweist sich demnach zur Zeit t als erfüllt, falls die bewegte Elektrizität bis zur Zeit t überall der Kontinuitätsbedingung (45) Genüge geleistet hat.

Aus den Entwickelungen des § 6 folgt nun ohne weiteres, daß die aus den elektromagnetischen Potentialen Φ, $\mathfrak{A}$ gemäß (28) und (29) abzuleitenden Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ wirklich den Feldgleichungen I bis IV Genüge leisten. Die Gleichungen (43) und (44) lösen das Problem, welches uns jetzt beschäftigt. Sie bestimmen die Störung des ursprünglichen elektrostatischen Feldes, wenn die anfängliche Verteilung der ruhenden Elektrizität und weiterhin ihre Bewegung gegeben ist.

Wir können die Lösung noch auf eine andere Form bringen, indem wir den Hilfsvektor einführen:

$$\mathfrak{q} = \int_0^l \mathfrak{k}\,dl = c\int_0^t \mathfrak{k}\,dt. \tag{47}$$

Wir tragen der Kontinuitätsbedingung (45) Rechnung, indem wir schreiben:

$$\operatorname{div}\mathfrak{q} = \int_0^l \operatorname{div}\mathfrak{k}\,dl = -\int_0^l \frac{\partial\varrho}{\partial l}\,dl = -\{\varrho_l - \varrho_0\}.$$

Es gibt also der Vektor $\mathfrak{q}$ durch seine negativ genommene Divergenz

$$-\operatorname{div}\mathfrak{q} = \varrho_l - \varrho_0 \tag{47a}$$

den Überschuß der jeweiligen elektrischen Dichte über die anfängliche Dichte an, während seine Ableitung nach l

$$\frac{\partial\mathfrak{q}}{\partial l} = \mathfrak{k} \tag{47b}$$

die Dichte des Konvektionsstromes darstellt. Diese beiden Größen waren es, welche in (43) und (44) auftraten.

Bestimmen wir jetzt einen neuen Vektor $\mathfrak{Z}$ folgendermaßen:

$$\mathfrak{Z}(0,l) = \int_0^l \lambda\,d\lambda \int d\omega\,\mathfrak{q}(\lambda, l-\lambda), \tag{48}$$

so gelangen wir durch Bildung der negativen Divergenz bzw.

der zeitlichen Ableitung zu (43) und (44) zurück. In der Tat, differentiieren wir nach l, so erhalten wir zwei Glieder

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l} = l \int d\omega \mathfrak{q}(l, 0) + \int_0^l \lambda d\lambda \int d\omega \left\{ \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial l} \right\}_{\lambda, l-\lambda};$$

das erste Glied ist gleich Null, weil, nach (47), $\mathfrak{q}$ für $l = 0$ verschwindet. Nach (44) und (47b) folgt demnach

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l}. \tag{48a}$$

Bildet man andererseits die Divergenz von $\mathfrak{Z}$ gemäß den bei der Ableitung an (45b) angegebenen Regeln, so folgt, mit Rücksicht auf (43) und (47a),

$$\Phi - \varphi = - \operatorname{div} \mathfrak{Z}. \tag{48b}$$

Der Vektor $\mathfrak{Z}$ stellt ein den elektromagnetischen Potentialen Φ, $\mathfrak{A}$ übergeordnetes Potential dar. Die Beziehungen (48a,b) lassen sofort erkennen, daß die Relation (46) allgemein erfüllt ist. Wir wollen $\mathfrak{Z}$ den „Hertzschen Vektor" nennen; wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, erhalten wir nämlich durch Spezialisierung des durch (48) definierten Vektors die sogenannte „Hertzsche Funktion", durch deren Ableitungen zweiter Ordnung nach der Zeit und nach den Koordinaten das elektromagnetische Feld eines Dipols sich darstellen läßt. Aus (48a,b) in Verbindung mit (28) und (29) ergeben sich zwischen den elektromagnetischen Vektoren und dem Hertzschen Vektor die Beziehungen:

$$\mathfrak{H} = \operatorname{curl} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l}, \tag{48c}$$

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0 = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{Z} - \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial l^2}. \tag{48d}$$

Hier stellt $\mathfrak{E}_0$ das ursprüngliche elektrostatische Feld vor. Die Formeln (48c,d) stellen den Verlauf einer beliebigen elektromagnetischen Störung mit Hilfe des Hertzschen Vektors dar.

Wir haben bisher immer die anfängliche Verteilung der ruhenden Elektrizität als gegeben angenommen. Man wird,

um sicher zu sein, daß die Energie und der Impuls des elektromagnetischen Feldes endlich sind, meist von einem elektrostatischen Anfangszustande ausgehen. Unter Umständen kann es indessen vorkommen, daß dieser Anfangszustand bereits sehr weit zurückliegt, und daß seine Kenntnis daher für das Feld in endlichen Entfernungen von dem Elektronensystem nicht von Belang ist. In diesem Falle wird man wünschen, die Formeln von dem elektrostatischen Potentiale φ zu befreien.

Liegt der Anfangszustand so weit zurück, daß die Kugel, die um den Aufpunkt P mit dem Radius $l = ct$ geschlagen ist, die gesamte Elektrizität des ursprünglichen elektrostatischen Feldes einschließt, so ist das elektrostatische Potential im Aufpunkte

$$\varphi(0, l) = \int_0^l \lambda \, d\lambda \int d\omega \, \varrho(\lambda, 0). \tag{49}$$

Denn, da außerhalb der Kugel l in dem elektrostatischen Felde sich keine Elektrizität befindet, so ist diese Formel dem Sinne nach völlig identisch mit

$$\varphi(0, l) = \int_0^\infty \lambda \, d\lambda \int d\omega \, \varrho(\lambda, 0), \tag{49a}$$

was wieder nur eine andere Form des in Bd. I, § 23 für das elektrostatische Potential erhaltenen Ausdrucks (83)

$$\varphi = \int \frac{dv \, \varrho}{r} \tag{49b}$$

ist.

Soll das Feld zur Zeit $t = 0$ wirklich durchweg ein elektrostatischer sein, so darf vor diesem Zeitpunkte die Elektrizität sich nicht bewegt haben. Es ist dann zu setzen

$$\varrho(r, l) = \varrho(r, 0) \quad \text{für} \quad l < 0$$

und daher

$$\varrho(\lambda, l - \lambda) = \varrho(\lambda, 0) \quad \text{für} \quad \lambda > l.$$

Es kann demnach in (43) ohne weiteres als obere Grenze $\lambda = \infty$ statt l gesetzt werden, ohne den Wert der rechten Seite zu

ändern. Demnach folgt, mit Rücksicht auf (49a) als Wert des skalaren elektromagnetischen Potentiales:

(50) $$\Phi = \int_0^\infty \lambda d\lambda \int d\omega \varrho(\lambda, l - \lambda).$$

Andererseits ist, da zu negativen Zeiten die Elektrizität sich nicht bewegt hat,

$$\mathfrak{k}(r, l) = 0 \quad \text{für} \quad l < 0$$

und daher

$$\mathfrak{k}(\lambda, l - \lambda) = 0 \quad \text{für} \quad \lambda > l.$$

Es kann somit auch in (44) die Integration ohne weiteres bis zur oberen Grenze $\lambda = \infty$ ausgedehnt werden; man erhält demnach als Ausdruck des elektromagnetisches Vektorpotentiales:

(50a) $$\mathfrak{A} = \int_0^\infty \lambda d\lambda \int d\omega \mathfrak{k}(\lambda, l - \lambda).$$

Diese Formeln für die elektromagnetischen Potentiale enthalten keine Beziehung zur anfänglichen Verteilung der Elektrizität. Sie gestatten folgende anschauliche Deutung:

Man denke sich um den Aufpunkt eine Kugel mit dem veränderlichen Radius λ geschlagen. Diese Kugel soll sich mit Lichtgeschwindigkeit kontrahieren, derart, daß sie zur Zeit t im Aufpunkte eintrifft. Zur Zeit $t - \tau$ ist ihr Radius $c\tau = \lambda$. Diese Kugel fegt nun gewissermaßen das Feld ab. Wo sie Elektrizität und Konvektionsstrom antrifft, da fängt sie die Beiträge ab

(51) $$d\Phi = \lambda d\lambda \int d\omega \varrho(\lambda, l - \lambda),$$

(51a) $$d\mathfrak{A} = \lambda d\lambda \int d\omega \mathfrak{k}(\lambda, l - \lambda),$$

welche nach Durchlaufung des Latensweges λ im Aufpunkte eintreffen. Es ist demnach für jedes Volumelement des Raumes diejenige Dichte der Elektrizität und des Konvektionsstromes in Rechnung zu setzen, welche die Kugel auf ihrem Wege antrifft; die Division durch den Kugelradius ergibt den Beitrag zum skalaren und zum Vektorpotentiale. Diese Beiträge eilen

mit Lichtgeschwindigkeit fort. Die Zusammensetzung aller Beiträge, d. h. die Integration nach λ, ergibt die Werte der elektromagnetischen Potentiale im Aufpunkte, gemäß den Formeln (50, 50a).

Wir können diese Formeln auch schreiben

(51b) $$\Phi = \int \frac{dv}{r} \{\varrho\}_{t-\frac{r}{c}},$$

(51c) $$\mathfrak{A} = \int \frac{dv}{r} \{\mathfrak{k}\}_{t-\frac{r}{c}}.$$

Dabei sind die Integrationen über den gesamten Raum auszudehnen, ebenso wie in der Formel (49b) für das elektrostatische Potential. Der Unterschied liegt nur darin, daß nicht die jeweilige Dichte der Elektrizität und des Konvektionsstromes in Rechnung zu setzen ist, sondern, wie der Index $t - \frac{r}{c}$ anzeigt, diejenige Dichte, welche zu einem um die Latenszeit $\tau = \frac{r}{c}$ früheren Zeitpunkte in dem betreffenden Volumelemente herrschte.

Die Potentiale (51b, c) sind von H. Poincaré, E. Beltrami, V. Volterra, H. A. Lorentz, T. Levi-Cività und anderen Forschern angewandt worden. Meist werden sie dem elektrostatischen Potentiale (49b) als „retardierte Potentiale", d. h. verspätete oder verzögerte Potentiale gegenübergestellt.

Die in (50, 50a) gegebene Darstellung der elektromagnetischen Potentiale durch einfache Integrale über den Latensweg, auf die wir hier unmittelbar geführt wurden, wird sich für die Ermittelung des Feldes bewegter Elektronen als besonders geeignet erweisen.

Die Formel (48) für den Hertzschen Vektor können wir gleichfalls, wenn der Anfangszustand hinreichend weit zurück liegt, auf die Form bringen

$$\mathfrak{Z} = \int_0^\infty \lambda d\lambda \int d\omega \, \mathfrak{q}(\lambda, l - \lambda)$$

und können sie, ähnlich wie (50) und (50a), durch Betrachtung der auf den Aufpunkt hin mit Lichtgeschwindigkeit sich kontrahierenden Kugel anschaulich deuten. Wir können sie auch auf die zu (51b, c) analoge Form bringen

$$\mathfrak{Z} = \int \frac{dv}{r} \left\{ \mathfrak{q} \right\}_{t-\frac{r}{c}}. \tag{51d}$$

Zweites Kapitel.

Die Wellenstrahlung einer bewegten Punktladung.

§ 9. Elektromagnetisches Modell einer Lichtquelle.

Die Entwickelungen des letzten Paragraphen haben uns gezeigt, daß der Raum die elektromagnetischen Wellen zwar fortpflanzt, daß aber in dem leeren Raume elektrische Störungen nicht entstehen können. Die Quellen der elektromagnetischen Störungen liegen in der bewegten Elektrizität. Da wir nun das Licht als elektromagnetische Wellenstrahlung zu betrachten gelernt haben, so werden wir zu dem Schlusse geführt, daß im Innern der lichtemittierenden Moleküle die Elektrizität in Bewegung begriffen ist. Das einfachste denkbare elektromagnetische Modell einer Lichtquelle erhalten wir, wenn wir ein einziges Elektron um seine Gleichgewichtslage schwingend annehmen.

Auf Grund der allgemeinen Ansätze des vorigen Paragraphen können wir das elektromagnetische Feld eines beliebig bewegten Elektrons bestimmen. Wir wollen indessen das vorliegende Problem zunächst unter gewissen Einschränkungen behandeln, Einschränkungen, die wir dann in den folgenden Paragraphen wieder beseitigen werden. Wir wollen in Betracht ziehen, daß die Bewegung des lichtaussendenden Elektrons nur auf molekulare Bereiche sich erstreckt, daß also seine Entfernung aus der Gleichgewichtslage klein ist gegen diejenigen Entfernungen, in denen man das entsandte Licht wahrnimmt. Ferner soll die Geschwindigkeit des Elektrons als klein gegen

die Lichtgeschwindigkeit angenommen werden. Die Gleichung (51d) des vorigen Abschnittes führt uns in diesem Falle ohne weiteres zum Ausdrucke des Hertzschen Vektors. Es kommt auf den Wert des, gemäß (47) und (10) bestimmten Vektors

$$\mathfrak{q} = c\int_0^t \mathfrak{i}\,dt = \int_0^t \varrho\mathfrak{v}\,dt$$

zur Zeit $t - \frac{r}{c}$ an; da diese Zeit, wie auch der Abstand r vom Aufpunkte, unter den gemachten Einschränkungen für alle Punkte des Elektrons den gleichen Wert hat, so wird, wenn wir uns das Elektron als Ganzes verschoben denken, die Elongation

$$\int_0^t \mathfrak{v}\,dt \quad \text{zur Zeit} \quad t - \frac{r}{c}$$

für alle Punkte des Elektrons merklich die gleiche sein. Setzen wir nun abkürzungsweise für das Produkt aus Ladung und Elongation den Vektor $\mathfrak{p}$:

$$e\int_0^t \mathfrak{v}\,dt = \mathfrak{p}(l), \tag{52}$$

indem wir, statt der Zeit t, den Lichtweg ct als Unabhängige einführen, so ergibt die Integration über das Volumen des Elektrons, gemäß (51d), als Ausdruck des Hertzschen Vektors:

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{p}(l-r)}{r}. \tag{52a}$$

Wir wollen voraussetzen, daß zur Zeit $t = 0$ das Elektron in seiner Gleichgewichtslage sich befindet, und daß dann das Molekül kein elektrostatisches Feld erregt. Alsdann ist in (48b) das anfängliche elektrostatische Potential φ gleich Null zu setzen, und es wird das skalare elektromagnetische Potential

$$\Phi = -\operatorname{div}\left\{\frac{\mathfrak{p}(l-r)}{r}\right\}. \tag{52b}$$

Bei der Berechnung der Divergenz des Produktes aus dem Skalar $\frac{1}{r}$ und dem Vektor $\mathfrak{p}$ ist die Formel (ι) der Zusammen-

stellung in Bd. I, S. 453 heranzuziehen, und es ist zu beachten, daß das Argument von $\mathfrak{p}$ die Entfernung r enthält; es wird

$$(52\text{c})\qquad \Phi = -\left(\mathfrak{p}(l-r), \nabla_a \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}(\dot{\mathfrak{p}}(l-r), \nabla_a r),$$

wo

$$\dot{\mathfrak{p}}(l) = \frac{d\mathfrak{p}(l)}{dl} = \frac{e\mathfrak{v}}{c}$$

die elektromagnetisch gemessene Stromstärke des Stromelementes ist, welches das bewegte Elektron darstellt. Dieselbe geht auch in den aus (48a) folgenden Ausdruck des elektromagnetischen Vektorpotentiales ein:

$$(52\text{d})\qquad \mathfrak{A} = \frac{\dot{\mathfrak{p}}(l-r)}{r}.$$

Das erste Glied in (52c) ist ganz analog gebaut, wie der Ausdruck für das Potential einer Doppelquelle (Bd. I, Gl. 81, S. 66), vom Momente $\mathfrak{p}(l-r)$. Dieses Glied kommt in der Nähe des Erregungszentrums ausschließlich in Betracht; das sieht man sofort ein, wenn man

$$(52\text{e})\qquad \nabla_a r = \mathfrak{r}_1, \quad \nabla_a \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\cdot \mathfrak{r}_1$$

setzt und dabei unter $\mathfrak{r}_2$ einen Einheitsvektor versteht, welcher der Richtung nach mit dem vom Erregungszentrum nach dem Aufpunkte hin gezogenen Radiusvektor $\mathfrak{r}$ übereinstimmt; dann wird

$$(52\text{f})\qquad \Phi = \frac{1}{r^2}\left(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{p}(l-r)\right) + \frac{1}{r}\left(\mathfrak{r}_1, \dot{\mathfrak{p}}(l-r)\right).$$

Es entsteht nun weiter die Aufgabe, aus den elektromagnetischen Potentialen die Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ abzuleiten. Wir ziehen es vor, statt diese durch Vektorkalkül zu berechnen eine Komponentenzerlegung vorzunehmen, erstens, weil so die Größenordnung der verschiedenen Glieder sich besser übersehen läßt, und zweitens, weil dabei die Beziehung unserer Entwickelungen zu der grundlegenden Arbeit von Heinrich Hertz[18]) deutlicher hervortritt. Wir berechnen den Beitrag, den die z-Komponente des Vektors $\mathfrak{p}$ zum Felde liefert; führt das Elektron Schwingungen parallel der z-Achse aus, so stellen die

betreffenden Anteile der Feldstärken bereits vollständig das Feld dar. Der Hertzsche Vektor geht in die Funktion

$$\mathfrak{Z}_z = \frac{\mathfrak{p}_z(l-r)}{r} \tag{53}$$

über, die Hertz mit Π bezeichnet hat, und die von manchen Autoren die „Hertzsche Funktion" genannt wird. Aus ihr sind die Komponenten der Feldstärken gemäß (48c, d) abzuleiten. Es ist

$$\mathfrak{H}_x = \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial y \partial l}, \quad \mathfrak{H}_y = -\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial x \partial l}, \tag{53a}$$

$$\mathfrak{E}_x = \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial x \partial z}, \quad \mathfrak{E}_y = \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial y \partial z}, \quad \mathfrak{E}_z = \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial l^2}. \tag{53b}$$

Die Ausführung der Differentiationen ergibt

$$\begin{cases} \mathfrak{E}_x = \mathfrak{p}_z \cdot \dfrac{3xz}{r^5} + \dot{\mathfrak{p}}_z \cdot \dfrac{3xz}{r^4} + \ddot{\mathfrak{p}}_z \cdot \dfrac{xz}{r^3}, \\ \mathfrak{E}_y = \mathfrak{p}_z \cdot \dfrac{3yz}{r^5} + \dot{\mathfrak{p}}_z \cdot \dfrac{3yz}{r^4} + \ddot{\mathfrak{p}}_z \cdot \dfrac{yz}{r^3}, \\ \mathfrak{E}_z = \mathfrak{p}_z \cdot \dfrac{3z^2-r^2}{r^5} + \dot{\mathfrak{p}}_z \cdot \dfrac{3z^2-r^2}{r^4} + \ddot{\mathfrak{p}}_z \cdot \dfrac{z^2-r^2}{r^3}; \end{cases} \tag{53c}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{H}_x = -\dot{\mathfrak{p}}_z \cdot \dfrac{y}{r^3} - \ddot{\mathfrak{p}}_z \cdot \dfrac{y}{r^2}, \\ \mathfrak{H}_y = +\dot{\mathfrak{p}}_z \cdot \dfrac{x}{r^3} + \ddot{\mathfrak{p}}_z \cdot \dfrac{x}{r^2}, \\ \mathfrak{H}_z = 0 \end{cases} \tag{53d}$$

Dabei sind es die Werte von $\mathfrak{p}_z$, $\frac{d\mathfrak{p}_z}{dl}$ und $\frac{d^2\mathfrak{p}_z}{dl^2}$ für den Argumentwert $(l-r)$, die für das Feld im Aufpunkte in Betracht kommen. Dieses Argument braucht jetzt, als selbstverständlich, nicht mehr in den Formeln zum Ausdruck gebracht zu werden.

Führt das Elektron in der Lichtquelle einfach harmonische Schwingungen aus, so daß etwa in (53c, d)

$$\mathfrak{p}_z = b \sin \frac{2\pi}{\lambda}\left(l - r\right)$$

zu setzen ist, so verhalten sich die Amplituden der drei Glieder z. B. im Ausdrucke der Komponenten von $\mathfrak{E}$ wie

$$1 : \frac{2\pi r}{\lambda} : \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2.$$

Es ist demnach, wenn die Entfernung vom lichtaussendenden Molekül klein gegen die Wellenlänge des entsandten Lichtes ist, nur das erste Glied zu berücksichtigen. Dort, wo man die Lichtstrahlung beobachtet, ist im Gegenteil $2\pi r$ groß gegen λ; hier hängt $\mathfrak{E}$ — und dasselbe gilt von dem magnetischen Vektor $\mathfrak{H}$ — nur von $\ddot{\mathfrak{p}}$ ab; die Feldstärken nehmen hier, wenn die Welle sich immer weiter ausbreitet, umgekehrt proportional der Entfernung vom Wellenzentrum ab. Das Gebiet, in dem dieses stattfindet, wird die „Wellenzone" genannt.

Wir wollen die Ausdrücke der Feldstärken in der Wellenzone sogleich in vektorieller Schreibweise angeben. Wir übersehen leicht, daß wir die zu $\ddot{\mathfrak{p}}$ proportionalen Glieder in (53c, d) und die aus ihnen durch zyklische Vertauschung von x, y, z entstehenden, welche Schwingungen parallel der x- bzw. der y-Achse entsprechen, folgendermaßen in Vektorgleichungen zusammenfassen können:

$$(54)\quad \begin{cases} \mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{r}_1}{r}\left(\mathfrak{r}_1\ddot{\mathfrak{p}}\right) - \frac{1}{r}\ddot{\mathfrak{p}} = \frac{1}{r}\left[\mathfrak{r}_1\left[\mathfrak{r}_1\ddot{\mathfrak{p}}\right]\right], \\ \mathfrak{H} = -\frac{1}{r}\left[\mathfrak{r}_1\ddot{\mathfrak{p}}\right]. \end{cases}$$

Dabei ist nach (52)

$$(54a)\quad \ddot{\mathfrak{p}} = \frac{d^2\mathfrak{p}}{dl^2} = \frac{e}{c^2}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$$

der Beschleunigung des Elektrons proportional.

Denken wir uns nun die vom schwingenden Elektron entsandten Wellen von einem beliebigen Aufpunkte aus beobachtet, so hängen die Feldstärken nur von dem Vektor

$$[\mathfrak{r}_1\ddot{\mathfrak{p}}]\quad .$$

ab. Es kommt für den Beobachter allein die Projektion der Schwingung auf eine zur Blickrichtung

senkrechte Ebene in Betracht. Das äußere Produkt aus dem Einheitsvektor $\mathfrak{r}_1$ und $\dot{\mathfrak{v}}$ liegt in dieser Ebene; es ist dem Betrage nach gleich, der Richtung nach senkrecht zu der Projektion von $\dot{\mathfrak{v}}$; ihm parallel ist nach (54) der magnetische Vektor der entsandten Wellen, der die Polarisationsebene des Lichtes bestimmt. Der Beobachter wird demnach geradlinig polarisiertes Licht wahrnehmen, wenn die Projektion der Elektronenbewegung auf die zur Blickrichtung senkrechte Ebene eine geradlinige Schwingung ist, und zwar wird die Schwingungsrichtung in jener Ebene senkrecht auf der Polarisationsebene des entsandten Lichtes sein. Ist hingegen die Projektion der Bewegung des Elektrons auf jene Ebene eine Kreisschwingung, so wird der Beobachter zirkular polarisiertes Licht wahrnehmen, und zwar rechts- oder linkszirkulares, je nachdem die Kreisschwingung rechts herum oder links herum (im Sinne des Uhrzeigers oder im entgegengesetzten) um die Blickrichtung stattfindet; denn bei einer Kreisbewegung rotieren Fahrstrahl, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor in dem gleichen Sinne.

Nach (54) bilden $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{r}_1$ ein System von drei aufeinander senkrechten Vektoren, und zwar folgen $\mathfrak{r}_1$, $-\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$, oder $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{r}_1$ aufeinander wie die Achsen eines rechtshändigen Koordinatensystems. Es liegt mithin $\mathfrak{E}$ in der Wellenebene senkrecht zu $\mathfrak{H}$, also parallel der Projektion des Vektors $\dot{\mathfrak{v}}$ (d. h. des Beschleunigungsvektors) auf die zur Blickrichtung senkrechte Ebene. Der Betrag von $\mathfrak{E}$ ist demjenigen von $\mathfrak{H}$ gleich. Es liegen demnach hier in der Wellenzone dieselben Verhältnisse vor wie bei ebenen elektromagnetischen Wellen (vgl. Bd. I, § 75). Nur ändern sich bei ebenen Wellen die Amplituden während der Fortpflanzung nicht, während hier, bei den Kugelwellen, die Amplituden der Feldstärken mit der reziproken Entfernung vom Zentrum abnehmen.

Der Strahlvektor $\mathfrak{S}$ ist nach Gleichung (13) durch das äußere Produkt von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ gegeben. Er weist also parallel dem Radiusvektor, was der Beobachtung entspricht. Da $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{S}$ ein System wechselseitig aufeinander senkrechter Richtungen

bilden und die Beträge von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ einander gleich sind, so ist der Betrag von $\mathfrak{S}$:

(54b) $$S = \frac{c}{4\pi} \cdot |\mathfrak{E}| \cdot |\mathfrak{H}| = \frac{c}{4\pi} \cdot \mathfrak{H}^2 = \frac{c}{4\pi r^2}\left[\mathfrak{r}_1 \ddot{\mathfrak{p}}\right]^2.$$

Bezeichnen wir mit ϑ den Winkel der Vektoren $\mathfrak{r}_1$ und $\ddot{\mathfrak{p}}$, so wird

(54c) $$S = \frac{c}{4\pi r^2}\, \ddot{\mathfrak{p}}^2 \sin^2 \vartheta$$

die Strahlung, die in der Sekunde durch die Flächeneinheit einer Kugel vom Radius r hindurchtritt; sie hängt gemäß (54a) von der Ladung e und von der Beschleunigung des Elektrons ab, und zwar selbstverständlich von derjenigen Beschleunigung, die stattfand, als die Welle entsandt wurde. Die Strahlung verschwindet für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$, d. h. für die Richtung des Beschleunigungsvektors und für die entgegengesetzte Richtung; sie ist am größten für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, d. h. senkrecht zur Beschleunigungsrichtung. Die Integration über die ganze Kugel ergibt als Gesamtstrahlung

$$\int S\,df = \frac{c}{4\pi}\, \ddot{\mathfrak{p}}^2 \cdot 2\pi \int_0^\pi d\vartheta \sin^3 \vartheta = \frac{c}{2}\, \ddot{\mathfrak{p}}^2 \cdot \int_{-1}^{+1} du\,(1 - u^2) = \frac{2}{3}\, c\ddot{\mathfrak{p}}^2.$$

Der Radius der Kugel ist hier herausgefallen; es tritt also durch alle von der Welle durchsetzten konzentrischen Kugeln der Wellenzone die gleiche Energiemenge hindurch. Diese Energie hat sich von dem schwingenden Elektron losgelöst und durcheilt in Form von Wellenstrahlung den Raum, wo sie je nach der Frequenz der Schwingungen als ultraviolettes, sichtbares oder ultrarotes Licht wahrgenommen wird. Diese in Wellenstrahlung verwandelte Energiemenge wird der Lichtquelle entzogen; die in der Sekunde entzogene Energie ist nach (54a)

(55) $$-\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3}\, c\ddot{\mathfrak{p}}^2 = \frac{2}{3}\, \frac{e^2}{c^3} \cdot \left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right)^2.$$

Ist die Schwingung eine einfach harmonische, und ist λ ihre Wellenlänge im Raume, so ist

$$\ddot{\mathfrak{p}} = \frac{d^2\mathfrak{p}}{dl^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \mathfrak{p};$$

daher wird der Energieverlust durch Strahlung

$$(55a) \qquad -\frac{dW}{dt} = \frac{32\pi^4 c}{3\lambda^4} \cdot \mathfrak{p}^2.$$

Die pro Zeiteinheit durch Strahlung verlorene Energie ist um so größer, je kleiner bei gegebener Schwingungsamplitude die Wellenlänge ist. Sie steigt bei abnehmender Wellenlänge umgekehrt proportional der vierten Potenz der Wellenlänge an. Die Schwingungen erfahren mithin eine Dämpfung durch Strahlung. Eine solche Dämpfung ist zuerst von H. Hertz in der oben erwähnten Arbeit theoretisch abgeleitet worden.

Wir wollen jetzt die Frage erörtern, inwieweit dieses einfachste elektromagnetische Modell einer Lichtquelle geeignet ist, von dem Vorgange der Lichtemission ein naturgetreues Bild zu geben. Wir wollen zunächst, das Resultat der Untersuchungen Zeemans (vgl. § 10) vorwegnehmend, voraussetzen, daß das negative Elektron es ist, welches in der Lichtquelle schwingt, und wollen dem negativen Elektron diejenigen Eigenschaften zuschreiben, die wir in § 2 bei Besprechung der Kathodenstrahlen kennen gelernt haben. Wir haben der mathematischen Behandlung den Fall zugrunde gelegt, daß vor Beginn des Schwingungsvorganges das Molekül nach außen hin unelektrisch ist. Die einfachste dementsprechende Hypothese würde die sein, daß das Molekül aus einem positiven und einem negativen Elektron besteht, deren Mittelpunkte anfangs zusammenfallen. Wird nun das negative Elektron verschoben, während das positive in Ruhe bleibt, so entsteht ein elektrischer Dipol. Unter dem Momente eines solchen Dipols wird man entsprechend dem Momente einer Doppelquelle (Bd. I, § 22) einen Vektor zu verstehen haben, der von der negativen Ladung zur positiven weist, und dessen Betrag gleich dem Produkte aus dem Abstand der Mittelpunkte beider Elektronen und der Ladung des positiven ist. Das ist aber nichts anderes, als der durch (52) definierte Vektor $\mathfrak{p}$, d. h. der von der ruhenden positiven zur bewegten negativen Ladung weisende

Fahrstrahl, multipliziert mit der negativen Ladung des bewegten Elektrons. Das Feld eines der z-Achse parallelen Dipols bringen die Formeln (53c, d) zur Darstellung.

Wollen wir nun erklären, wieso etwa das Licht des Quecksilberdampfes aus einzelnen feinen Spektrallinien besteht, so müssen wir den in den Molekülen bewegten Elektronen gewisse Eigenschwingungen zuschreiben. Um die Existenz dieser Eigenschwingungen zu verstehen, nimmt die Elektronentheorie an, daß auf die Elektronen gewisse quasielastische Kräfte wirken, d. h. Kräfte, welche der jeweiligen Entfernung aus der Gleichgewichtslage proportional sind. Da die Elektronen Trägheit besitzen, so würde hierdurch die Möglichkeit von Eigenschwingungen bestimmter Frequenz gegeben sein. Freilich ist so nur ein Rätsel auf ein anderes zurückgeführt. Denn es entsteht nun die Frage, welcher Art jene quasielastische Kraft ist, ob sie ihrerseits elektrischen Ursprunges ist, etwa von der positiven Elektrizität herrührend, oder ob sie von der wägbaren Materie auf die Elektronen ausgeübt wird. Auch die große Zahl der Spektrallinien jedes einzelnen chemischen Elementes bereitet der Erklärung Schwierigkeiten. Soll man annehmen, daß jedes Molekül des Quecksilberdampfes alle die Spektrallinien aussendet, oder strahlt das eine Molekül diese, das andere jene Linie aus? Im ersteren Falle wäre dem Molekül eine große Zahl elektrischer Eigenschwingungen zuzuschreiben, und das einfache Modell des elektrischen Dipols würde dann nicht zur Darstellung des Feldes ausreichen. Im zweiten Fall jedoch würde die Existenz der merkwürdigen Gesetzmäßigkeiten, welche die Spektrallinien mancher Körper aufweisen, schwer verständlich sein. Die Fragen der molekularen Struktur, die mit dem Probleme der Spektrallinien zusammenhängen, sind leider noch wenig aufgeklärt. Wir müssen uns damit begnügen, an unserem einfachsten elektromagnetischen Modell festhaltend, jede Spektrallinie einem anderen Dipol zuzuschreiben und die Eigenschwingungen formal durch Einführung quasielastischer Kräfte zur Darstellung zu bringen. Wir gelangen so zu einem Ansatz, der als Arbeitshypothese gute Dienste leistet.

Wir setzen die Schwingungsgleichung des elektrischen Dipols in der Form an:

$$\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} + k^2\mathfrak{p} = 0; \tag{56}$$

nach (52) können wir schreiben

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\frac{m}{e}k^2\mathfrak{p} = \frac{m}{|e|}k^2\mathfrak{p}. \tag{56a}$$

Hier steht rechts die quasielastische Kraft, welche das mit der trägen Masse m behaftete Elektron in die Gleichgewichtslage zurückzieht. Der Verlauf des Schwingungsvorgangs wird von den Anfangsbedingungen abhängen; wir können uns etwa vorstellen, daß durch den Zusammenstoß mit einem anderen Molekül die Schwingungen des Elektrons angeregt werden. Wie dem auch sei, jedenfalls wird während der Schwingung das Zeitmittel der kinetischen Energie dem Zeitmittel der potentiellen gleich sein. Die gesamte Energie des schwingenden Dipols ist, wenn wir zunächst von der Dämpfung absehen, konstant; sie beträgt

$$W = m\overline{\mathfrak{v}^2} = \frac{m}{e^2}\overline{\left(\frac{d\mathfrak{p}}{dt}\right)^2}, \tag{56b}$$

wobei die horizontalen Striche die Bildung des zeitlichen Mittelwertes andeuten.

Wir haben jedoch oben gesehen, daß der schwingende Dipol fortgesetzt Energie ausstrahlt. Diese Ausstrahlung wird nun zu einer Dämpfung der Schwingungen Veranlassung geben müssen. Wir wollen den Betrag dieser Dämpfung berechnen. Aus (55) folgt

$$-\frac{dW}{dl} = \frac{2}{3}\overline{\ddot{\mathfrak{p}}^2} \tag{56c}$$

für die Abnahme der Schwingungsenergie, berechnet auf den Lichtweg $l = 1$ cm, d. h. die Abnahme während der Zeit

$$t = \frac{1}{c} = \frac{1}{3}\,10^{-10}\text{ sec.}$$

Während dieser Zeit hat das Elektron eine große Zahl von Schwingungen ausgeführt — $2 \cdot 10^4$ für $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ cm —,

so daß die Mittelwertsbildung über sehr viele Schwingungen gerechtfertigt ist. Andererseits können wir (56b) nach Einführung der spezifischen Ladung des Elektrons (Gl. 9) schreiben:

$$W = \frac{c}{\eta e} \overline{\dot{\mathfrak{p}}^2}. \tag{56d}$$

Da die Punkte in $\dot{\mathfrak{p}}$, $\ddot{\mathfrak{p}}$ Differentiation nach l andeuten, so gilt

$$\overline{\ddot{\mathfrak{p}}^2} : \overline{\dot{\mathfrak{p}}^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2.$$

Wir erhalten daher

$$-\frac{d \ln W}{dl} = \frac{2}{3} \frac{\eta e}{c} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2.$$

Es nimmt somit die Schwingungsenergie nach dem Gesetze ab:

$$W = W_0 e^{-\gamma l}, \tag{56e}$$

wo der Abklingungskoeffizient

$$\gamma = \frac{8\pi^2}{3} \frac{\eta e}{c \lambda^2} \tag{56f}$$

zu setzen ist. Dasselbe Exponentialgesetz gilt für die Abnahme der Intensität der entsandten Strahlung; dem Lichtwege 1 cm entspricht ein Herabsinken der Lichtintensität auf den Bruchteil $e^{-\gamma}$.

Nun läßt sich aus Interferenzversuchen eine obere Grenze für die Abnahme der Strahlungsintensität gewinnen. Für manche Spektrallinien, z. B. für die grüne Quecksilberlinie, haben sich nämlich Interferenzen bei sehr hohen Gangunterschieden herstellen lassen. Die Verfeinerung der Technik solcher Interferenzversuche, um die sich A. Michelson, O. Lummer und andere Experimentatoren verdient gemacht haben, hat zu sichtbaren Interferenzen noch bei Gangunterschieden von 50 cm geführt. Wäre nun die Abklingungskonstante γ so groß, daß sich auf einem Lichtwege von 40 cm ein Herabsinken der Intensität des Lichtes auf ein Hundertstel ihres Wertes oder einen noch geringeren Bruchteil ergäbe, so könnte die Theorie von diesen Interferenzversuchen nicht Rechenschaft geben. Wir wollen sehen, welcher Wert von γ sich aus (56f) ergibt.

Wir setzen für e und η die in (2) und (9) angegebenen Werte ein, nehmen $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ an und finden

$$\gamma = \frac{8\pi^2}{3} \cdot \frac{1{,}865 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 10^{-10}}{3 \cdot 10^{10} \cdot 25 \cdot 10^{-10}} = 2 \cdot 10^{-3}.$$

Daraus ergibt sich für einen Lichtweg von 50 cm ein Herabsinken der Lichtintensität auf den Bruchteil

$$e^{-\gamma \cdot 50} = e^{-0,1} = 0{,}9;$$

es würde hiernach bei einem Gangunterschied von 50 cm noch sehr wohl eine Interferenz bemerkbar sein. Man könnte sich eher darüber wundern, daß nicht bei noch höheren Gangunterschieden Interferenzen sich herstellen lassen. Allein außer der Dämpfung durch Strahlung dürften noch andere Ursachen mitspielen, die den regelmäßigen Verlauf des Schwingungsvorganges beeinträchtigen. So dürfte z. B. beim Stoße zweier Moleküle des Dampfes der ursprüngliche Schwingungsvorgang gestört und eine neue, mit einer andern Phase einsetzende Schwingung eingeleitet werden.

In der Schwingungsgleichung (56) bzw. (56a) ist der Dämpfung durch Strahlung nicht Rechnung getragen worden. Wir wollen jetzt nachträglich die Schwingungsgleichung so modifizieren, daß der durch (55) in allgemeinster Weise angegebene Energieverlust zum Ausdrucke gelangt. Wir führen in (56a) eine „dissipative Kraft $\mathfrak{K}^s$" ein, indem wir schreiben

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\frac{m}{e}k^2\mathfrak{p} + \mathfrak{K}^s. \tag{57}$$

Diese dissipative Kraft $\mathfrak{K}^s$ stellt die Rückwirkung der Strahlung auf das bewegte Elektron dar. Ihre Arbeitsleistung muß mit dem Energieverluste (55) durch die Relation verknüpft sein:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathfrak{v}\mathfrak{K}^s)\,dt = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right)^2 dt; \tag{57a}$$

dabei bezeichnen t_1, t_2 zwei, etwa durch eine ganze Schwingung getrennte Zeitpunkte, zu denen die Beschleunigung des Elek-

trons gleich Null ist. Während des Zeitintervalles von t_1 bis t_2 wird eine bestimmte Energiemenge entsandt; dieser muß die gesamte, in der gleichen Zeit von der rückwirkenden Kraft $\mathfrak{K}^s$ geleistete Arbeit entgegengesetzt gleich sein. Würde etwa zur Zeit t_1 die ungleichförmige Bewegung des Elektrons beginnen und zur Zeit t_2 endigen, so würde die gesamte Arbeit von $\mathfrak{K}^s$ und die gesamte Energie der entsandten Wellenstrahlung durch den Ausdruck (57a) gegeben sein.

Wir können nun die rechte Seite von (57a) durch partielle Integration umformen; da die Beschleunigung an den Grenzen des Integrationsintervalles verschwindet, so wird

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathfrak{v}\,\mathfrak{K}^s)\,dt = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_{t_1}^{t_2}\left(\mathfrak{v}, \frac{d^2\mathfrak{v}}{dt^2}\right)dt.$$

Wir erfüllen also die Energiegleichung, indem wir setzen

$$\mathfrak{K}^s = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{d^2\mathfrak{v}}{dt^2}, \tag{58}$$

d. h. indem wir die Reaktionskraft der Strahlung dem zweiten Differentialquotienten des Geschwindigkeitsvektors nach der Zeit proportional annehmen.

Durch Einführung des Ausdruckes (58) von $\mathfrak{K}^s$ in (57) erhalten wir

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\frac{m}{e}k^2\mathfrak{p} + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{d^2\mathfrak{v}}{dt^2}; \tag{58a}$$

diese allgemeine Schwingungsgleichung tritt nunmehr an Stelle von (56a). Gemäß (52) kann hierfür geschrieben werden

$$\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3}\frac{d^3\mathfrak{p}}{dt^3} + k^2\mathfrak{p} = 0. \tag{58b}$$

Die Schwingungsgleichung des elektrischen Dipoles wird also bei Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung eine Differentialgleichung dritter Ordnung[42]).

Man könnte nun gegen die obige Ableitung des Ausdrucks (58) einwenden, daß durch die Energiegleichung allein die

Reaktionskraft $\mathfrak{K}^s$ nicht eindeutig bestimmt ist, und könnte versuchen, dieselbe durch den allgemeinen Ansatz darzustellen

$$\mathfrak{K}^s = \alpha_1 \mathfrak{v} + \alpha_2 \frac{d\mathfrak{v}}{dt} + \alpha_3 \frac{d^2\mathfrak{v}}{dt^2} + \cdots + \alpha_{\nu+1} \frac{d^\nu \mathfrak{v}}{dt^\nu} + \cdots;$$

dabei müßten, bei den hier betrachteten kleinen Schwingungen die Koeffizienten α Konstanten sein, die von der Lichtgeschwindigkeit c und von der Elektronenladung e abhängen; und zwar müßten sie proportional e^2 sein, da es sich um eine vom Elektron auf sich selbst ausgeübte Kraft handelt. Setzt man dementsprechend $\alpha_{\nu+1} = e^2 c^k a_{\nu+1}$, wo $a_{\nu+1}$ eine reine Zahl ist, so gibt eine Dimensionsbetrachtung sofort über die zulässigen Werte von k und ν Auskunft. Die Dimension des Quadrates der elektrostatisch gemessenen Ladung e ist, zufolge der Tabelle Bd. I, S. 260, gleich ML^3T^{-2}; es gilt, da der Kraft $\mathfrak{K}^s$ die Dimension MLT^{-2} zukommt, die Dimensionsgleichung

$$L^{-2} = [LT^{-1}]^k \cdot LT^{-(\nu+1)}.$$

Hieraus folgen für k und ν eindeutig die Werte $k = -3$, $\nu = -k - 1 = 2$.

Man sieht also, daß nur ein Ausdruck von der Form (58) zulässig ist; der Zahlwert a_3 bestimmt sich durch die Energiegleichung.

Die mit der Strahlung zusammenhängende dissipative Kraft wirkt nach einem anderen Gesetze als die Reibungskraft der gewöhnlichen Mechanik. Während man jene der Geschwindigkeit proportional setzt, ist diese, für kleine Geschwindigkeiten, der zweiten Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit proportional.

§ 10. **Der Zeeman-Effekt.**

Daß das elektromagnetische Modell eines lichtemittierenden Moleküles, welches wir soeben kennen lernten, in manchen Fällen der Wirklichkeit entspricht, dafür ist der experimentelle Beweis durch die Entdeckung P. Zeemanns[71]) erbracht worden. Dieser Forscher hat gezeigt, daß die Spektrallinien in starken magnetischen Feldern gewisse Veränderungen erfahren; diese

Veränderungen haben sich in vielen Fällen ohne weiteres auf Grund der Lorentzschen Theorie deuten lassen. Wir dürfen nicht versäumen, den Zeeman-Effekt aus der im vorigen Paragraphen entwickelten Theorie abzuleiten.

Führen wir, der Grundgleichung (V) gemäß, die von dem äußeren Magnetfelde auf das Elektron ausgeübte Kraft in die Bewegungsgleichung (56a) ein, so lautet diese

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\frac{m}{e}k^2\mathfrak{p} + \frac{e}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}],$$

oder, wenn wir überall, nach (52), die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Elektrons durch das elektrische Moment $\mathfrak{p}$ des Dipols ersetzen und die spezifische Ladung $\eta = \frac{|e|}{cm} = -\frac{|e|}{cm}$ des negativen Elektrons einführen:

(59) $$\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} + k^2\mathfrak{p} = -\eta\left[\frac{d\mathfrak{p}}{dt}\mathfrak{H}\right].$$

Dabei haben wir das Dämpfungsglied wiederum fortgelassen, weil der äußerst geringe Betrag der Dämpfung für die Frequenzen der Eigenschwingungen nicht wesentlich in Betracht kommt.

Wir legen der Integration der Schwingungsgleichung (59) sofort ein geeignetes Koordinatensystem zugrunde. Die z-Achse mag in Richtung der magnetischen Kraftlinien weisen, während die (xy)-Ebene auf diesen senkrecht steht; dann ergibt die Komponentenzerlegung

(59a) $$\frac{d^2\mathfrak{p}_x}{dt^2} + k^2\mathfrak{p}_x = -\eta|\mathfrak{H}|\frac{d\mathfrak{p}_y}{dt},$$

(59b) $$\frac{d^2\mathfrak{p}_y}{dt^2} + k^2\mathfrak{p}_y = +\eta|\mathfrak{H}|\frac{d\mathfrak{p}_x}{dt},$$

(59c) $$\frac{d^2\mathfrak{p}_z}{dt^2} + k^2\mathfrak{p}_z = 0.$$

Die Schwingungskomponente parallel den magnetischen Kraftlinien wird demnach von dem magnetischen Felde nicht beeinflußt. Setzen wir

$$\mathfrak{p}_z = Ce^{i\nu t},$$

so ist die Frequenz $\nu = k$ dieser Komponente die gleiche, welche allen drei Schwingungskomponenten außerhalb des magnetischen Feldes zukommt.

Was aber die Schwingungen in der (xy)-Ebene anbelangt, so sind die Komponenten $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$ durch das magnetische Feld miteinander verkoppelt, wie die Gleichungen (59a, b) anzeigen. Das läßt vermuten, daß wir hier zwei voneinander und von der ursprünglichen Frequenz k abweichende Frequenzen ν' und ν'' erhalten werden. Wir versuchen die Differentialgleichungen (59a, b) durch den Ansatz

$$\mathfrak{p}_x = a e^{i\nu t}, \quad \mathfrak{p}_y = b e^{i\nu t} \tag{60}$$

zu befriedigen, wo a und b zwei komplexe, für Amplitude und Phase der beiden Komponenten maßgebende Konstanten sind. Wir finden

$$\begin{cases} a(k^2 - \nu^2) = -\eta\,|\mathfrak{H}|\,bi\nu, \\ b(k^2 - \nu^2) = +\eta\,|\mathfrak{H}|\,ai\nu. \end{cases} \tag{60a}$$

Durch Eliminatien von a und b wird für ν^2 die quadratische Gleichung erhalten

$$(\nu^2 - k^2)^2 = \eta^2\,|\mathfrak{H}|^2\,\nu^2.$$

Bezeichnen wir mit ν' die kleinere, mit ν'' die größere der beiden Frequenzen, so erhalten wir

$$\begin{cases} \nu'^2 - k^2 = -\eta\,|\mathfrak{H}|\,\nu', \\ \nu''^2 - k^2 = +\eta\,|\mathfrak{H}|\,\nu'', \end{cases} \tag{60b}$$

oder, weil nur positive Werte ν', ν'' zulässig sind:

$$\begin{cases} \nu' = -\frac{1}{2}\eta\,|\mathfrak{H}| + \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}\eta^2|\mathfrak{H}|^2}, \\ \nu'' = +\frac{1}{2}\eta\,|\mathfrak{H}| + \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}\eta^2|\mathfrak{H}|^2}, \end{cases} \tag{60c}$$

Es werden also von den zu den Magnetkraftlinien senkrechten Schwingungskomponenten des Dipols zwei Spektrallinien entsandt, deren Frequenzen voneinander und von der ursprünglichen Frequenz k abweichen.

Der Abstand der beiden Spektrallinien, in der Skala der Frequenzen gemessen, beträgt

$$\nu'' - \nu' = \eta\,|\mathfrak{H}|, \tag{60d}$$

er ist gleich dem Produkte aus der spezifischen Ladung der schwingenden Elektronen und der magnetischen Feldstärke.

Die ursprüngliche Frequenz k entspricht nach (60c) nicht genau der Mitte der beiden abgeänderten Frequenzen ν', ν''. Doch ergibt sich das Produkt $\eta\,|\mathfrak{H}|$ für alle herstellbaren Felder so gering — nur mit intensiven Feldern gelingt überhaupt die Trennung der Linien —, daß das Quadrat dieses Produktes in (60c) zu vernachlässigen ist, und daß mit genügender Annäherung gesetzt werden darf:

$$\frac{\nu' + \nu''}{2} = k. \tag{60e}$$

Um nun den Charakter der stattfindenden Schwingungen zu erkennen, müssen wir das Verhältnis der Konstanten a, b aus einer der Gleichungen (60a) ermitteln. Für die langsamere der beiden Schwingungen, von der Frequenz ν', folgt aus (60a, b)

$$\frac{b'}{a'} = \frac{\nu'^2 - k^2}{i\nu'\eta\,|\mathfrak{H}|} = +\,i, \tag{60f}$$

für die schnellere der beiden Schwingungen, von der Frequenz ν'',

$$\frac{b''}{a''} = \frac{\nu''^2 - k^2}{i\nu''\eta\,|\mathfrak{H}|} = -\,i. \tag{60g}$$

Es sind also, sowohl für die langsamere wie für die schnellere Schwingung, die Amplituden der beiden Komponenten $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$ die gleichen; die Phasen jedoch weichen um $\frac{\pi}{2}$ voneinander ab. Beides sind demnach zirkulare Schwingungen. Bei der langsamen Schwingung ist, nach (60f), die y-Komponente der x-Komponente um $\frac{\pi}{2}$ an Phase voran, d. h. die Kreisbewegung führt, nach einer Viertelschwingung, von der y-Achse zur x-Achse, sie stellt also eine negative Drehung um die mit der z-Achse zusammenfallende Richtung des magnetischen Feldes dar. Einem auf der Seite der positiven z-Achse befindlichen

Beobachter erscheint die Kreisschwingung als Drehung im Sinne des Uhrzeigers oder als rechtszirkulare Schwingung. Bei der schnelleren Schwingung hingegen ist nach (60g) die x-Komponente der y-Komponente um $\frac{\pi}{2}$ an Phase voran, diese Bewegung entspricht einer positiven Umkreisung der z-Achse und erscheint einem auf der Seite der positiven z-Achse befindlichen Beobachter als linkszirkulare, dem Uhrzeigersinne entgegengesetzte Schwingung.

Wir denken uns jetzt die Flamme zwischen den Polen des Magneten; auf derjenigen Seite, nach der das magnetische Feld gerichtet ist, mag der Magnet durchbohrt sein. Was wird ein durch die Öffnung hindurchblickender Beobachter wahrnehmen?

Für diesen Beobachter kommen nur die Schwingungen in der (xy)-Ebene in Betracht; denn wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, daß nur die zur Blickrichtung senkrechten Komponenten der Elektronenbewegung für die ausgestrahlten Wellen maßgebend sind. Die der z-Achse parallele Komponente sendet daher den Magnetkraftlinien parallel kein Licht aus. Der Beobachter wird also bei spektraler Zerlegung des Lichtes die ursprünglich einfache Spektrallinie verdoppelt finden. Dieses Duplet von Linien ist zirkularpolarisiert, und zwar erscheint dem Beobachter, welcher den Kraftlinien des magnetischen Feldes entgegenblickt, die im Spektrum auf der roten Seite liegende Linie rechtszirkular, die auf der violetten Seite liegende linkszirkular polarisiert. Die Beobachtung des „longitudinalen Zeemann-Effektes“ hat in der Tat ein derartiges Duplet ergeben, wenigstens für die Mehrzahl der untersuchten Spektrallinien. Hieraus ist zu schließen, daß das negative Elektron es ist, welches die Spektrallinien ausstrahlt. In der Tat haben wir, bei der Aufstellung der Grundgleichung (59), die negative Ladung des Elektrons bereits berücksichtigend

$$\eta = \frac{e'}{cm} = \frac{-e}{cm}$$

gesetzt. Für die positiven Elektronen wäre in (59) das Vorzeichen von η umzukehren, mithin auch in (60a); so würde sich für die beiden Kreisschwingungen das entgegengesetzte Verhalten ergeben, indem die rechtszirkulare die schnellere, die linkszirkulare die langsamere sein müßte. Der Zeemann-Effekt zeigt also, daß die im vorigen Paragraphen gegebene Spezialisierung des elektromagnetischen Modelles einer Lichtquelle, welche den periodischen Wechsel des Dipols auf die Schwingungen des negativen Elektrons zurückführt, für die betreffenden Spektrallinien zutreffende Folgerungen ergibt. Die Messung des Abstandes der beiden Linien des Duplets gestattet es, wenn die magnetische Feldstärke bekannt ist, auf Grund von (60d) die spezifische Ladung η zu bestimmen. Auf diesem Wege findet A. Stettenheimer[57]) den Wert

$$\eta = 1{,}79 \cdot 10^7; \tag{61}$$

derselbe stimmt mit dem bei Kathodenstrahlen erhaltenen (vgl. § 2, Gl. 9) so gut überein, als es bei der Schwierigkeit dieser Messungen zu erwarten ist.

Übrigens hat sich auch die Forderung der Theorie, daß der Abstand der Komponenten des Duplets, in der Skala der Frequenzen gemessen, für alle Linien bei gegebenem magnetischem Felde der gleiche, und der magnetischen Feldstärke proportional ist, in den Fällen bestätigt, wo überhaupt die einfache Zerlegung in ein Duplet gefunden wurde.

Was wird nun ein Beobachter wahrnehmen, der das senkrecht zu den Magnetkraftlinien ausgestrahlte Licht spektral zerlegt? Er wird nach § 9 die Projektion der Schwingung auf eine zur Blickrichtung senkrechte, also den magnetischen Kraftlinien des Feldes parallele Ebene beobachten. In der Projektion ergeben aber die beiden zirkularen Schwingungen geradlinige Schwingungen von den Frequenzen ν' und ν'', senkrecht zu den Kraftlinien. Hierzu tritt nun noch die Schwingung $\mathfrak{p}_z$ parallel den Kraftlinien, deren Frequenz diejenige der ursprünglichen Spektrallinie ist. Der Beobachter wird also ein Triplet von Linien wahrnehmen; in den beiden

äußeren Linien finden die elektrischen Schwingungen senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien des äußeren Feldes statt; diese sind also geradlinig parallel den Kraftlinien polarisiert. Die innere Linie hingegen ist senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien polarisiert; in ihr finden die Schwingungen des elektrischen Vektors parallel den Kraftlinien des Magnetfeldes statt, in dem sich die Flamme befindet. Auch diese Beschreibung des „transversalen Zeeman-Effektes" entspricht, bei den meisten Spektrallinien, der Beobachtung.

Diese einfache Form weist die Veränderung der Spektrallinien im magnetischen Felde jedoch keineswegs in allen Fällen auf. Manche Spektrallinien, z. B. die gelben Natriumlinien D_1 und D_2, teilen sich, anstatt in drei, in vier oder in sechs Linien; gewisse Linien des Quecksilberspektrums weisen, bei Beobachtung senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien, sogar eine Teilung in neun Linien auf. Wie die sorgfältigen Untersuchungen von C. Runge und F. Paschen[50]) ergeben haben, sind es gerade die Serienlinien, die solche anomalen Zeeman-Effekte zeigen. Diese Untersuchungen haben sehr bemerkenswerte Gesetzmäßigkeiten festgestellt. Alle Linien einer und derselben Serie weisen die gleiche Zerlegung im magnetischen Felde auf, sowohl was die Zahl, als auch was den in der Skala der Frequenzen gemessenen Abstand der getrennten Linien anbelangt. Ja sogar die Linien verschiedener Elemente, die einer und derselben Gruppe des Mendelejeffschen Systemes angehören, besitzen meist den gleichen Zeeman-Effekt, wenn sie entsprechenden Serien angehören. Der Zeeman-Effekt ist ein charakteristisches Merkmal für die betreffende Serie; er hat es in einigen Fällen ermöglicht, bis dahin noch nicht in Serien eingeordneten Linien ihren richtigen Platz anzuweisen.

Das in den beiden letzten Paragraphen entwickelte einfache Modell eines leuchtenden Moleküles erweist sich, wie wir sehen, gerade für die Serienlinien als unzulänglich, da diese Linien meist anomale Zeeman-Effekte zeigen. In der Tat konnten wir das Bild eines einzelnen, unter dem Einflusse einer quasi-

elastischen Kraft um eine stabile Gleichgewichtslage schwingenden Elektrons nur als eine provisorische Arbeitshypothese betrachten. Es ist merkwürdig genug, daß dieses Bild wenigstens für die isolierten Linien von der Beobachtung bestätigt wird. Es ist bisher noch nicht gelungen, die anomalen Zeeman-Effekte vom Standpunkte der Elektronentheorie aus in befriedigender Weise zu deuten. Die von C. Runge und F. Paschen entdeckten Gesetzmäßigkeiten lassen vermuten, daß eine befriedigende Erklärung nur in Verbindung mit der Theorie der Spektralserien möglich sein wird. Jenes einfache elektrische Modell eines Moleküles oder Atomes wird dabei zweifellos durch ein komplizierteres zu ersetzen sein. Da unsere Kenntnisse der elektrischen Struktur der Atome und Moleküle der Materie nur gering sind, so ist dabei der Hypothesenbildung ziemlich freies Spiel gelassen. Andererseits sind die von Balmer, Kayser und Runge, Rydberg und Ritz für die Wellenlängen der Spektralserien aufgestellten Formeln so genau gültig, daß sie ein recht scharfes Kriterium für die Zulässigkeit einer derartigen Hypothese bilden. Die Deutung jener Spektralformeln, welche gleichzeitig die Theorie der anomalen Zeeman-Effekte der Serienlinien ergeben müßte, ist wohl die wichtigste und die schwierigste Aufgabe der elektromagnetischen Lichttheorie. Daß die Elektronentheorie nicht ganz auf der falschen Fährte ist, zeigt der Umstand, daß hinsichtlich der Polarisation die anomalen Zeeman-Effekte den normalen ähnlich sind. So weisen z. B. von den neun Linien, in welche gewisse Linien des Quecksilbers im magnetischen Felde sich spalten, die drei inneren dieselbe Polarisation auf wie die innere Linie des einfachen Triplets, während die äußeren Linien ebenso polarisiert sind wie die äußeren Linien des Triplets bzw. Duplets, nämlich bei Strahlung senkrecht zum magnetischen Felde geradlinig parallel den Kraftlinien, bei Strahlung parallel dem magnetischen Felde zirkular. Auch sind die Größenordnung der Linienabstände und der Sinn der Zirkularpolarisation dieselben wie bei dem einfachen Duplet und Triplet. Das läßt vermuten, daß auch hier die negative Elektronen in Bewegung begriffen sind, freilich unter weniger einfachen Bedingungen.

Bei der Strahlung der Bandenspektren ist es bisher nicht gelungen, einen Zeeman-Effekt des magnetischen Feldes nachzuweisen. Man kann im Zweifel sein, ob dieses Licht von Elektronen ausgesandt wird, die mit Atomen der wägbaren Materie verkoppelt sind, oder ob es den Schwingungen der positiven Elektronen seinen Ursprung verdankt. Es ist vielleicht nicht ganz ausgeschlossen, daß es mit Hilfe einer verfeinerten optischen Technik einst gelingen wird, über diese Frage Auskunft zu erhalten.

§ 11. Die elektromagnetischen Potentiale einer bewegten Punktladung.

In § 9 haben wir bei der Berechnung des Hertzschen Vektors für eine schwingende Punktladung uns gewisse Vernachlässigungen gestattet. Wir haben angenommen, daß die Bewegung der Ladung auf einen Bereich sich erstreckt, dessen Abmessungen klein gegen die Entferung der Punktladung vom Aufpunkte sind. Sodann haben wir die Geschwindigkeit der bewegten Ladung als klein gegen die Lichtgeschwindigkeit angesehen. Diese Voraussetzungen wollen wir jetzt fallen lassen. Wir betrachten ein Elektron, welches sich beliebig im Raume bewegen kann; seine Geschwindigkeit soll zunächst beliebig groß angenommen werden. Wir lassen indessen auch jetzt noch die Größe und Gestalt des Elektrons unberücksichtigt, indem wir dasselbe wie eine Punktladung behandeln. Wie wir bereits früher erwähnten, ist es vom Standpunkte der Nahewirkungstheorie aus undenkbar, daß eine endliche Elektrizitätsmenge auf einen mathematischen Punkt zusammengedrängt wird, da dieses einen unendlichen Wert der Feldenergie ergeben würde. Wir werden diese Bemerkung später bestätigt finden und werden der Dynamik des Elektrons bestimmte Annahmen über seine Form und Bewegungsfreiheit zugrunde legen. Immerhin werden sich die Abmessungen des Elektrons so gering — von der Ordnung 10^{-13} cm — ergeben, daß es für manche Zwecke ausreichend ist, das Elektron als Punktladung zu betrachten. Das wird selbstverständlich nur

für solche Aufpunkte erlaubt sein, deren Abstand vom Elektron groß gegen dessen Abmessungen ist. Dieser Bedingung genügen jedenfalls die in der Wellenzone gelegenen Aufpunkte. Daher werden wir die Formeln dieses Paragraphen insbesondere zur Ermittelung der von einem rasch bewegten Elektron entsandten Wellenstrahlung verwerten können. Wir werden so der in § 9 entwickelten Theorie der ruhenden Lichtquelle eine Theorie der bewegten Lichtquelle an die Seite stellen und werden andererseits gewisse Konsequenzen der Stokes-Wiechertschen Hypothese entwickeln, welche die Röntgenstrahlen als die beim Aufprall der Kathodenstrahlen auf die Antikathode entsandte Wellenstrahlung anspricht. Die Folgerungen sind gerade dadurch bemerkenswert, daß sie sich auf den Grenzfall eines Elektrons von verschwindenden Abmessungen beziehen. Welche Voraussetzungen man auch über die Gestalt des Elektrons machen möge, beim Grenzübergang zu verschwindend kleinen Abmessungen muß sich stets dasselbe Resultat ergeben. Freilich ist dieser Grenzübergang, wie wir sehen werden, nicht immer erlaubt. In allen Fällen jedoch, in denen er erlaubt ist, sind die Ergebnisse als Folgerungen derjenigen Grundhypothesen der Elektronentheorie allein anzusehen, die in den Grundgleichungen (I) bis (V) formuliert sind.

Wir bestimmen die elektromagnetischen Potentiale der Punktladung auf Grund der allgemeinen Formeln (50, 50a). Wir denken uns eine Elektrizitätsmenge e, die einen gewissen endlichen Bereich erfüllt. Die Entfernung des Aufpunktes P soll groß sein gegen die Abmessungen jenes Bereiches. Wir erinnern uns der Deutung mit Hilfe der auf den Aufpunkt hin sich mit Lichtgeschwindigkeit kontrahierenden Kugel, durch die wir die Formeln (51) und (51a) erläuterten. Für unseren Aufpunkt P ist der Radius λ der Kugel groß gegen die Abmessungen der Flächenstücke f, in denen sie das bewegte Elektron schneidet; es sind mithin diese Flächenstücke mit genügender Annäherung als eben zu betrachten; durch diese Ebenen wird das Elektron in dünne Scheiben von der Höhe dh zerschnitten; die einzelne Scheibe enthält die Elektrizitätsmenge $f\varrho dh = de$.

Nun bezieht sich die Integration in (50) nicht auf die Volumelemente des bewegten Elektrons, sondern auf die jeweils von Elektrizität erfüllten Volumelemente des Raumes. Will man den Beitrag

$$\lambda d\lambda d\omega \varrho = df \varrho \frac{d\lambda}{\lambda}$$

berechnen, den die Elektrizitätsmenge de der einzelnen Scheibe zu dem Werte von Φ im Aufpunkte beisteuert, so muß man den Abstand $d\lambda$ der beiden Lagen der sich kontrahierenden Kugel berechnen, wo diese in die elektrizitätserfüllte Scheibe eintritt bzw. aus dieser austritt; dieser Abstand ist im Raume, nicht im bewegten Elektron gemessen zu denken. Es ist aber nicht schwer, $d\lambda$ zu berechnen. Setzen wir

$$d\lambda = c d\tau,$$

so ist $d\tau$ die Zeit, während deren die mit der Geschwindigkeit c durch den Raum eilende Fläche über die Scheibe von der Höhe dh hinwegstreicht. Diese Zeit berechnet sich als Quotient aus der Höhe dh und der dieser Höhe parallelen Komponenten der Relativgeschwindigkeit der bewegten Fläche und der bewegten Scheibe. Die Kugel bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit senkrecht zu der Grundfläche der Scheibe, während die Geschwindigkeit der Scheibe durch die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Elektrons sich bestimmt; und zwar ist die Komponente von $\mathfrak{v}$ in Richtung nach dem Mittelpunkte der Kugel, d. h. in Richtung des vom Elektron nach dem Aufpunkte hin gezogenen Radiusvektor $\mathfrak{r}$ zu nehmen. Folglich ist die entsprechende Komponente der Relativgeschwindigkeit von Kugel und Scheibe gleich $c - \mathfrak{v}_r$. Es ist also die Zeit $d\tau$, während deren die Kugel die Scheibe überstreicht:

$$d\tau = \frac{dh}{c - \mathfrak{v}_r},$$

und daher

$$d\lambda = c d\tau = \frac{dh}{1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}}. \tag{62}$$

Wir haben soeben stillschweigend angenommen, daß $c > \mathfrak{v}_r$ ist, d. h. daß das Elektron von der sich kontrahierenden Kugel überholt wird. Bewegt sich hingegen das Elektron mit Überlichtgeschwindigkeit, so kann der Fall eintreten, daß es, die kontrahierende Kugel überholend, von außen nach innen durch dieselbe hindurchtritt. In diesem Falle ist die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_r - c$, und es ist

$$d\lambda = \frac{dh}{\frac{\mathfrak{v}_r}{c} - 1} \tag{62a}$$

zu setzen. Allgemein ist zu schreiben

$$d\lambda = \frac{dh}{\left|1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right|}. \tag{62b}$$

Doch wollen wir zunächst $|\mathfrak{v}| < c$ annehmen und an (62) die weitere Betrachtung anknüpfen.

Wir erhalten als Beitrag unserer Scheibe zum skalaren elektromagnetischen Potential im Aufpunkte

$$df\varrho \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{df\varrho\, dh}{\lambda} \frac{1}{\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)} = \frac{de}{r\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)}. \tag{62c}$$

Es bleibt nur die Integration über die einzelnen Scheiben übrig. Da der Abstand r des Aufpunktes als groß gegen die Abmessungen des Elektrons angesehen wurde, so ist er bei der Integration konstant zu halten. Die Integration ist daher ohne weiteres auszuführen, falls es auch erlaubt ist, $\mathfrak{v}$ als konstant anzusehen für diejenige Zeit, während deren die Kugel über das Elektron hinwegstreicht. Sie ergibt in diesem Falle

$$\Phi = \frac{e}{r\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)} \tag{63}$$

als Wert des skalaren elektromagnetischen Potentiales für Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit.

In dem Grenzfalle einer Punktladung ist es natürlich ohne weiteres gestattet, $\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)$, ebenso wie r, bei der Inte-

gration über das Elektron als konstant anzusehen. Da wir indessen diesen Grenzfall nicht als streng verwirklicht betrachten, so bedeutet die Konstantsetzung dieser Größen eine gewisse Einschränkung des Gültigkeitsbereiches der Formel (63). Erstens ist diese Formel, wie schon erwähnt, nur auf solche Aufpunkte anzuwenden, deren Abstand vom Elektron groß gegen die Abmessungen des Elektrons ist. Schließen wir das Elektron in eine Kugel vom Radius a ein, so muß

(63a) $$r \text{ groß gegen } a$$

sein. Zweitens aber muß, damit die Veränderung von $\frac{\mathfrak{v}_r}{c}$ in der Zeit $\frac{2a}{c-\mathfrak{v}_r}$, während deren die Kugel über das Elektron hinwegstreicht, für keinen der Aufpunkte in Betracht kommt,

(63b) $$\frac{|\dot{\mathfrak{v}}|\,2a}{c(c-|\mathfrak{v}|)} \text{ klein gegen } 1$$

sein ($\dot{\mathfrak{v}}$ stellt den Beschleunigungsvektor dar).

Nur dann, wenn die Abmessungen des Elektrons so klein, die Beschleunigung so gering und die Geschwindigkeit von der Lichtgeschwindigkeit so entfernt ist, daß die Bedingungen (63a) und (63b) erfüllt sind, ist es gestattet, das Elektron durch eine Punktladung zu ersetzen.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so läßt sich die Berechnung des Vektorpotentiales nach der Formel (50a) in entsprechender Weise durchführen. Es tritt nur an die Stelle des Skalars ϱ der durch (10) bestimmte Vektor $\varrho\frac{\mathfrak{v}}{c}$. Schließen wir Rotationen des Elektrons aus, so ist der Beitrag jeder einzelnen Scheibe zum Vektorpotential

$$de\frac{\mathfrak{v}}{c}\frac{1}{r\left(1-\frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)}.$$

Ist nun die Bedingung (63b) erfüllt, so ist auch die Änderung, welche $\frac{\mathfrak{v}}{c}$ beim Hinwegstreichen der mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Kugel über das Elektron erfährt,

zu vernachlässigen, und es führt die Integration über die einzelnen Scheiben ohne weiteres zum Ausdruck

$$\mathfrak{A} = \frac{e\mathfrak{v}}{rc\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)} \tag{64}$$

des elektromagnetischen Vektorpotentiales.

Die Formeln (63) und (64) für die elektromagnetischen Potentiale einer bewegten Punktladung sind von A. Liénard[26]) und E. Wiechert[67]) abgeleitet worden. Infolge der geringen Abmessungen des Elektrons erweisen sie sich auch für ziemlich beträchtliche Beschleunigungen und bis unmittelbar an die Lichtgeschwindigkeit heran als gültig. Der Fall unstetiger Bewegung des Elektrons hingegen sowie der Fall einer beschleunigten Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit liegen nicht in ihrem Gültigkeitsbereiche, weil hier die Bedingung (63b) nicht mehr erfüllt ist. Auch ungleichförmige Bewegungen mit Überlichtgeschwindigkeit dürfen nicht auf Grund dieser Formeln behandelt werden, weil es bei solchen Bewegungen immer Aufpunkte gibt, wo $c - \mathfrak{v}_r = c\,|\mathfrak{v}|\cos(\mathfrak{v}, \mathfrak{r})$ gleich Null wird; auf solche Aufpunkte hin eilt die kontrahierende Kugel mit derselben Geschwindigkeit wie das Elektron, so daß $\mathfrak{v}$ bei der Integration über das Elektron nicht als konstant angesehen werden darf. Auch die Anwendung auf gleichförmige Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit gibt sich dadurch als unzulässig kund, daß es Aufpunkte gibt, für welche der Nenner in (63) bzw. (64) verschwindet. In solchen Aufpunkten drängen sich, da die kontrahierende Kugel stets die mit Überlichtgeschwindigkeit bewegte Punktladung durchschneidet, die zu allen vorangegangenen Zeiten entsandten Beiträge zusammen; daher rührt das Unendlichwerden der Ausdrücke (63) und (64). Dasselbe fällt fort, wenn man die Elektrizität des Elektrons auf ein Volum von endlichen, wenn auch geringen, Abmessungen verteilt annimmt. Es ist demnach für den Fall der Lichtgeschwindigkeit und der Überlichtgeschwindigkeit der Grenzübergang zur Punktladung unzulässig. Die Anwendung der Formeln (63) und (64) zur Ermittelung des

Feldes eines bewegten Elektrons ist auf somit Bewegungen mit Unterlichtgeschwindigkeit einzuschränken.

Aus der Ableitung dieser Formeln geht hervor, daß $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{v}$ Radiusvektor vom Elektron nach dem Aufpunkt und Geschwindigkeit des Elektrons zu der Zeit t' bedeuten, als die mit Lichtgeschwindigkeit c sich kontrahierende Kugel über das Elektron fortstrich. Diese Zeit

$$t' = t - \frac{r}{c} \tag{64a}$$

bestimmt sich für einen jeden Aufpunkt, wenn die Bewegung des Elektrons gegeben ist; denn r ist dadurch als Funktion von t' gegeben. Falls, wie weiterhin angenommen wird, die Geschwindigkeit des Elektrons kleiner als c ist, so kann die Kugel das Elektron immer nur ein einziges Mal schneiden. Es ordnet sich mithin für einen gegebenen Aufpunkt P der Zeit t des Eintreffens der Störung die Zeit t' des Entsendens in eindeutiger Weise zu. Da offenbar

$$\frac{dr}{dt'} = -\mathfrak{v}_r \tag{64b}$$

ist, so folgt aus (64a)

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{d\left(t' + \frac{r}{c}\right)}{dt'} = 1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}$$

oder

$$\frac{1}{1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}} = \frac{dt'}{dt}. \tag{64c}$$

Man kann daher die Formeln (63) und (64) auch folgendermaßen schreiben:

$$\Phi = \frac{e}{r}\frac{dt'}{dt}. \qquad \mathfrak{A} = \frac{e\mathfrak{v}}{rc}\frac{dt'}{dt}. \tag{65}$$

Aus den elektromagnetischen Potentialen folgt nach (28) und (29) das elektromagnetische Feld der bewegten Punktladung.

§ 12. Das Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung.

Wir betrachten eine Punktladung, die sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Es mag E' (Abb. 2) ihre Lage zur Zeit t' gewesen sein, als sie die Beiträge (63) und (64) zu den elektromagnetischen Potentialen entsandte, die

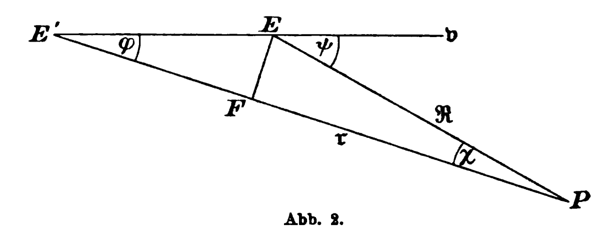


Abb. 2.

zur Zeit t im Aufpunkte P eintreffen; E sei hingegen der Punkt, in dem die Ladung sich zu der Zeit t befindet. Es ist daher

$$E'P = r, \quad E'E = |\mathfrak{v}| \frac{r}{c},$$

und die Projektion von $E'E$ auf $E'P$:

$$E'F = \mathfrak{v}_r \frac{r}{c}.$$

Folglich ist

$$FP = r\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right).$$

Wir können andererseits FP durch den von der gleichzeitigen Lage E des Elektrons nach dem Aufpunkte P hin gezogenen Radiusvektor $\mathfrak{R}$ ausdrücken. Es ist

$$FP = R\cos\chi = R\sqrt{1 - \sin^2\chi}.$$

Da nun aus elementargeometrischen Gründen gilt

$$\sin\chi : \sin\psi = E'E : E'P = |\mathfrak{v}| \frac{r}{c} : r = \frac{|\mathfrak{v}|}{c},$$

so folgt

$$r\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right) = R\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2\psi}, \tag{66}$$

wobei abkürzungsweise gesetzt ist

$$\beta = \frac{|\mathfrak{v}|}{c} < 1. \tag{66a}$$

Da die Geschwindigkeit der Punktladung kleiner ist als die Lichtgeschwindigkeit, so ist β ein echter Bruch.

Die Formeln (63) und (64) ergeben jetzt

$$\Phi = \frac{e}{R\sqrt{1-\beta^2\sin^2\psi}}, \tag{66b}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{e\mathfrak{v}}{cR\sqrt{1-\beta^2\sin^2\psi}} \tag{66c}$$

als die elektromagnetischen Potentiale der gleichförmig bewegten Punktladung. Wie man sieht, hängt ihr Wert zur Zeit t nur ab von der Lage des Aufpunktes, bezogen auf die gleichzeitige Lage des Elektrons und auf die Bewegungsrichtung. Führen wir Koordinaten X, Y, Z ein, mit E als Koordinatenursprung und der Bewegungsrichtung als X-Achse, so gilt

$$\Phi = \frac{e}{s}, \quad \mathfrak{A}_x = \frac{e\beta}{s}, \quad \mathfrak{A}_y = \mathfrak{A}_z = 0, \tag{67}$$

wenn

$$s = R\sqrt{1-\beta^2\sin^2\psi} = \sqrt{X^2+(1-\beta^2)(Y^2+Z^2)} \tag{67a}$$

gesetzt wird.

Bezogen auf ein mit dem Elektron mitbewegtes Bezugssystem, sind die elektromagnetischen Potentiale, und mithin die Felder des elektrischen und des magnetischen Vektors, von der Zeit unabhängig.

Indem wir das mit dem Elektron translatorisch bewegte Bezugssystem zugrunde legen, können wir das elektromagnetische Feld aus (28), (29) ohne weiteres ableiten. Wir haben nur zu beachten, daß die vom bewegten Bezugssystem aus beurteilte zeitliche Änderung des Vektors $\mathfrak{A}$ (vgl. Bd. I, Gl. 116, S. 116)

$$\frac{\partial'\mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{A} = 0$$

ist. Daraus folgt

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial t} = -\beta\frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial X}.$$

Es ergibt daher (29)

$$(67\text{b})\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial X} + \beta \dfrac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial X} = -(1-\beta^2)\dfrac{\partial \Phi}{\partial X}, \\ \mathfrak{E}_y = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial Y}, \qquad \mathfrak{E}_z = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial Z}; \end{cases}$$

nach Ausführung der Differentiationen folgt

$$(67\text{c})\quad \mathfrak{E}_x = (1-\beta^2)\frac{eX}{s^3}, \quad \mathfrak{E}_y = (1-\beta^2)\frac{eY}{s^3}, \quad \mathfrak{E}_z = (1-\beta^2)\frac{eZ}{s^3};$$

oder, in vektorieller Schreibweise

$$(67\text{d})\quad \mathfrak{E} = (1-\beta^2)\frac{e\mathfrak{R}}{s^3}.$$

Der elektrische Vektor weist parallel dem von der jeweiligen Lage des Elektrons aus konstruierten Radiusvektor $\mathfrak{R}$.

Andererseits ergibt sich aus (28) für die Komponenten des magnetischen Vektors:

$$(67\text{e})\quad \begin{cases} \mathfrak{H}_x = 0, \\ \mathfrak{H}_y = \dfrac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial Z} = \beta\dfrac{\partial \Phi}{\partial Z} = -\beta \mathfrak{E}_z, \\ \mathfrak{H}_z = -\dfrac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial Y} = -\beta\dfrac{\partial \Phi}{\partial Y} = +\beta \mathfrak{E}_y, \end{cases}$$

oder, vektoriell geschrieben

$$(67\text{f})\quad \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\left[\mathfrak{v}\mathfrak{E}\right] = \frac{(1-\beta^2)e}{cs^3}\left[\mathfrak{v}\mathfrak{R}\right].$$

Der magnetische Vektor steht senkrecht auf der Bewegungsrichtung des Elektrons und auf dem Radiusvektor $\mathfrak{R}$. Das durch (67d, f) bestimmte Feld führt die Punktladung bei ihrer Bewegung mit.

Das elektromagnetische Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung ist zuerst von O. Heaviside[15]) angegeben worden. Es entspricht dem Felde eines gleichförmig bewegten Elektrons in Entfernungen, die groß gegen die Abmessungen des Elektrons sind.

Wir berechnen noch den durch die Grundgleichung (V) bestimmten Vektor

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}];$$

derselbe gibt die elektromagnetische Kraft an, welche auf die Einheit der mitbewegten Ladung wirkt. Es ist nach (67b, e)

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{E}_x \qquad = -(1-\beta^2)\frac{\partial \Phi}{\partial X},$$

$$\mathfrak{F}_y = \mathfrak{E}_y - \beta\mathfrak{H}_z = -(1-\beta^2)\frac{\partial \Phi}{\partial Y},$$

$$\mathfrak{F}_z = \mathfrak{E}_z + \beta\mathfrak{H}_y = -(1-\beta^2)\frac{\partial \Phi}{\partial Z},$$

oder, vektoriell geschrieben

$$\mathfrak{F} = -\nabla\Psi, \quad \Psi = (1-\beta^2)\frac{e}{s}. \tag{68}$$

Die elektromagnetische Kraft auf die mitbewegte Einheit der Ladung stellt sich als negativer Gradient eines Skalars Ψ dar. Dieser wird das „Konvektionspotential" genannt.

Wir wollen die Flächen konstanten Konvektionspotentiales konstruieren. Diese Flächen

$$s^2 = X^2 + (1-\beta^2)(Y^2+Z^2) = \text{Constans} \tag{68a}$$

sind abgeplattete Rotationsellipsoide; ihr Mittelpunkt fällt in die Punktladung, ihre Rotationsachse in die Bewegungsrichtung; ihr Achsenverhältnis ist

$$\sqrt{1-\beta^2} : 1. \tag{68b}$$

Diese Ellipsoide werden Heaviside-Ellipsoide genannt; ihre Abplattung wächst mit wachsender Geschwindigkeit der Ladung.

Setzt man $\beta = 0$, so geht das Feld des Vektors $\mathfrak{F}$ in das elektrostatische Feld, das Konvektionspotential Ψ in das elektrostatische Potential über; die Schar der einander ähnlichen Heaviside-Ellipsoide geht in eine Schar konzentrischer Kugeln über. In der Theorie der Konvektionsstrahlung spielt das Konvektionspotential eine ähnliche Rolle wie das elektro-

statische Potential in der Elektrostatik. Die Äquipotentialflächen eines ruhenden, geladenen Körpers sind, in großer Entfernung von dem Körper, stets konzentrische Kugeln. Dementsprechend nehmen die Flächen konstanten Konvektionspotentiales in dem von einem gleichförmig bewegten Elektron erregten Felde, in großen Entfernungen vom Elektron stets die Form von Heaviside-Ellipsoiden an; senkrecht zu diesen Flächen ist die Kraft gerichtet, welche das Elektron auf eine mit gleicher Geschwindigkeit ihm parallel bewegte Ladung ausübt.

Die Feldstärken (67d, f) nehmen, mit wachsender Entfernung von der erregenden Ladung, umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung ab. Bei gleichförmiger Bewegung des Elektrons bildet sich demnach keine Wellenzone aus, es findet keine Energieabgabe durch Strahlung statt, sondern es wird die Energie vom Elektron konvektiv mitgeführt. Das gleichförmig bewegte Elektron stellt eine reine Konvektionsstrahlung dar. Eine Wellenstrahlung wird nur dann entsandt, wenn die Geschwindigkeit der bewegten Ladung sich dem Betrage oder der Richtung nach ändert.

§ 13. Das Feld einer ungleichförmig bewegten Punktladung.

Die allgemeinen Formeln, welche wir in § 11 für die elektromagnetischen Potentiale einer Punktladung gewonnen haben, gestatten es, das Feld einer beliebig bewegten Punktladung zu ermitteln. Beschränken wir uns auf den Fall der Unterlichtgeschwindigkeit, auf Beschleunigungen, welche der Bedingung (63b), und auf Entfernungen, welche der Bedingung (63a) genügen, so stellen die so zu erhaltenden Formeln das Feld eines ungleichförmig bewegten Elektrons dar. Sie sind insbesondere darum von Interesse, weil sie die Wellenstrahlung eines beschleunigten Elektrons enthalten.

Wir schreiben die Ausdrücke (63, 64) der elektromagnetischen Potentiale folgendermaßen:

$$\Phi = \frac{e}{s}, \quad \mathfrak{A} = \frac{e\mathfrak{v}}{sc}, \tag{69}$$

wobei wir abkürzungsweise

$$s = r\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right) = r - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}\mathfrak{r}) \tag{69a}$$

setzen.

Dabei bedeutet $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor, der von der bewegten Punktladung nach dem festen Aufpunkte P gezogen ist. Wir nehmen die Bewegung der Punktladung als gegeben an und betrachten demnach $\mathfrak{r}$ als bekannte Funktion von t'. Die Geschwindigkeit des Elektrons zur Zeit t' ist

$$\mathfrak{v} = -\frac{d\mathfrak{r}}{dt'}, \tag{69b}$$

und deren Komponente parallel dem nach dem Aufpunkte hingezogenen Radiusvektor:

$$\mathfrak{v}_r = -\frac{dr}{dt'}. \tag{69c}$$

Ferner ist die Beschleunigung, die das Elektron zur Zeit t' erfährt:

$$\dot{\mathfrak{v}} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt'}. \tag{69d}$$

Der zur Zeit t' von der Punktladung entsandte Beitrag trifft nun nach Durchlaufung des Latensweges r im Aufpunkte P ein, also zur Zeit

$$t = t' + \frac{r}{c}. \tag{70}$$

Ist andererseits der Aufpunkt P gegeben und die Zeit t des Eintreffens der Störung in P, so ist, durch Gleichung (70), die Zeit t' des Entsendens in eindeutiger Weise bestimmt. Es ist diejenige Zeit, zu der die auf den Aufpunkt hin sich mit Lichtgeschwindigkeit kontrahierende Kugel die Punktladung trifft. Für den hier behandelten Fall der Unterlichtgeschwindigkeit ist Zeit und Ort des Treffens eindeutig bestimmt, wenn die Bewegung der Ladung gegeben ist.

Bei gegebenem Aufpunkt ordnet sich also, gemäß (70), einer jeden Zeit t des Eintreffens eine Zeit t' des Entsendens zu. Dem Übergang zur Zeit $t + dt$ des Eintreffens entspricht, bei

festgehaltenem Aufpunkt, ein Übergang zur Zeit $t' + dt'$ des Entsendens; dabei ist, nach (70),

$$1 = \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{dr}{dt'}\frac{\partial t'}{\partial t},$$

oder, nach (69c und a),

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}} = \frac{r}{s}. \tag{70a}$$

Diese Relation ist dem Sinne nach durchaus mit der Gleichung (64c) identisch. Sie unterscheidet sich von ihr nur der Form nach, indem wir dort totale, hier partielle Differentiationszeichen gebrauchen. Das geschieht darum, weil wir den Aufpunkt P nicht ein für allemal festhalten, sondern uns die Freiheit lassen, bei festgehaltener Zeit den Aufpunkt P zu verrücken. Einer solchen Verrückung des Aufpunktes würde eine Änderung der Zeit t' des Entsendens entsprechen, die wir in kartesischer Schreibweise durch die partiellen Differentialquotienten nach den Koordinaten des Aufpunktes auszudrücken hätten. In vektorieller Schreibweise wird die Veränderung von t' bei Verschiebung des Aufpunktes durch den Gradienten $\nabla t'$ sich ausdrücken. Nach (70) ist

$$0 = \nabla t' + \frac{1}{c}\nabla r.$$

Bei der Berechnung des Gradienten von r ist nun mit Vorsicht zu verfahren. Würde nur der Aufpunkt verschoben und der Ort der Punktladung festgehalten, so würde der Gradient des Abstandes r mit dem vom Elektron zum Aufpunkte hinweisenden Einheitsvektor $\mathfrak{r}_1$ identisch sein. Nun entspricht aber der abgeänderten Zeit t' des Entsendens eine Verrückung der Punktladung, die zu einer Abstandsänderung

$$\frac{dr}{dt'}\nabla t' = -\mathfrak{v}_r \nabla t'$$

Veranlassung gibt.

Es wird demnach $\nabla \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{v}_r \nabla t'$, so daß man erhält

$$0 = \left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)\nabla t' + \frac{1}{c}\mathfrak{r}_1.$$

Hieraus folgt, mit Rücksicht auf (70a)

(70b) $$\nabla t' = -\frac{\mathfrak{r}_1}{c}\frac{\partial t'}{\partial t}.$$

Daneben ergibt sich

(70c) $$\nabla r = \mathfrak{r}_1 \frac{\partial t'}{\partial t}.$$

Würde man andererseits, bei festgehaltenem Aufpunkte, r partiell nach der Zeit t differentiieren, so würde nur der Zuwachs des Abstandes infolge der Abänderung der Zeit t' des Entsendens und der hierdurch bedingten Verrückung der Punktladung in Frage kommen; es wird

(70d) $$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{dr}{dt'}\frac{\partial t'}{\partial t} = -\mathfrak{v}_r \frac{\partial t'}{\partial t}.$$

Durch partielle Differentiation nach der Zeit und nach dem Orte des Aufpunktes sind aus den elektromagnetischen Potentialen (69) die Feldstärken, gemäß (28) und (29), abzuleiten. Um diese Differentiationen durchführen zu können, müssen wir noch angeben, wie s und $\mathfrak{v}$ nach Zeit und Ort zu differentiieren sind. Was zunächst s anbelangt, so ist dasselbe, nach (69a), bei gegebenem Aufpunkte nur von t' abhängig. Man hat daher

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{ds}{dt'}\frac{\partial t'}{\partial t},$$

und, nach (69a bis d):

(71) $$\frac{\partial s}{\partial t} = \left\{ -\mathfrak{v}_r - \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}) + \frac{\mathfrak{v}^2}{c} \right\} \frac{\partial t'}{\partial t}.$$

Der Gradient von s hingegen ist

$$\nabla s = \nabla r - \frac{1}{c}\nabla(\mathfrak{v}\mathfrak{r}).$$

Wie bei der Berechnung des Gradienten von r, so ist auch bei der Berechnung des Gradienten des skalaren Produktes

$$(\mathfrak{v}\mathfrak{r}) = x\mathfrak{v}_x + y\mathfrak{v}_y + z\mathfrak{v}_z$$

zu beachten, daß nicht nur der Aufpunkt verschoben wird, sondern daß dem verschobenen Aufpunkte sich, gemäß (70),

ein anderer Ort der Punktladung zuordnet. Die x-Komponente des bei festgehaltener Punktladung genommenen Gradienten von $(\mathfrak{v}\mathfrak{r})$ ist

$$\frac{\partial(\mathfrak{v}\mathfrak{r})}{\partial x} = \mathfrak{v}_x.$$

Es ist demnach der erste Bestandteil des Gradienten gleich $\mathfrak{v}$. Der zweite, infolge der Verrückung der Punktladung hinzutretende Bestandteil ist

$$\frac{d(\mathfrak{v}\mathfrak{r})}{dt'} \nabla t' = \left\{(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}) - \mathfrak{v}^2\right\} \nabla t'.$$

Es wird demnach, gemäß (70b):

$$\nabla(\mathfrak{v}\mathfrak{r}) = \mathfrak{v} - \frac{\mathfrak{r}_1}{c}\left\{(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}) - \mathfrak{v}^2\right\}\frac{\partial t'}{\partial t}.$$

Mit Rücksicht auf (70c) folgt endlich als Gradient von s:

(71a) $$\nabla s = \mathfrak{r}_1\left\{1 + \frac{1}{c^2}(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}) - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}\right\}\frac{\partial t'}{\partial t} - \frac{\mathfrak{v}}{c}.$$

Was die partiellen Differentialquotienten von $\mathfrak{v}$ nach t, x, y, z anbelangt, so gilt, da $\mathfrak{v}$ nur von t' abhängt, nach (69d)

(71b) $$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = \dot{\mathfrak{v}}\frac{\partial t'}{\partial t}.$$

In entsprechender Weise gilt z. B.

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} = \dot{\mathfrak{v}}_z\frac{\partial t'}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z} = \dot{\mathfrak{v}}_y\frac{\partial t'}{\partial z}.$$

Daher ist die x-Komponente von curl $\mathfrak{v}$

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z} = [\nabla t', \dot{\mathfrak{v}}]_x.$$

Entsprechende Ausdrücke gelten für die übrigen Komponenten; wir fassen sie, Gleichung (70b) berücksichtigend, zu der Vektorgleichung zusammen:

(71c) $$\operatorname{curl} \mathfrak{v} = \frac{1}{c}[\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}_1]\frac{\partial t'}{\partial t}.$$

Wir haben jetzt die Mittel gewonnen, um auf Grund der Formeln (28, 29):

$$\mathfrak{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t},$$

$$\mathfrak{H} = \operatorname{curl}\mathfrak{A},$$

aus (69) das elektromagnetische Feld abzuleiten. Wir erhalten

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{s^2}\nabla s - \frac{e}{sc^2}\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} + \frac{e\mathfrak{v}}{s^2c^2}\frac{\partial s}{\partial t}.$$

Nach (71a) ist hier zu setzen

$$\nabla s + \frac{\mathfrak{v}}{c^2}\frac{\partial s}{\partial t} = \mathfrak{r}_1\left\{1 + \frac{1}{c^2}(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}) - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}\right\}\frac{\partial t'}{\partial t} - \frac{\mathfrak{v}}{c}\left\{1 - \frac{1}{c}\frac{\partial s}{\partial t}\right\}.$$

Ferner folgt aus (71) und (70a)

$$1 - \frac{1}{c}\frac{\partial s}{\partial t} = \left\{1 + \frac{1}{c^2}(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}) - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}\right\}\frac{\partial t'}{\partial t},$$

mithin

$$\nabla s + \frac{\mathfrak{v}}{c^2}\frac{\partial s}{\partial t} = \left\{\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{v}}{c}\right\}\cdot\left\{1 + \frac{1}{c^2}(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}) - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}\right\}\frac{\partial t'}{\partial t}.$$

Mit Rücksicht auf (71b) und (70a) wird demnach der folgende Ausdruck des elektrischen Vektors erhalten:

$$(72)\qquad \mathfrak{E} = -\frac{e\dot{\mathfrak{v}}}{rc^2}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 + \frac{e}{r^2}\left\{\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{v}}{c}\right\}\cdot\left\{1 - \beta^2 + \frac{1}{c^2}(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r})\right\}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^3;$$

dabei ist, abkürzungsweise,

$$(72\text{a})\qquad \beta^2 = \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}$$

gesetzt worden.

Der magnetische Vektor hingegen wird, nach Regel ($\varkappa$) in Bd. I, S. 453.

$$\mathfrak{H} = \frac{e}{c}\operatorname{curl}\left\{\frac{\mathfrak{v}}{s}\right\} = \frac{e}{sc}\operatorname{curl}\mathfrak{v} + \frac{e}{s^2c}[\mathfrak{v}, \nabla s].$$

Hierin sind die Ausdrücke (71c) und (71a) einzutragen, und es ist wieder, nach (70a), s durch r und $\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)$ auszudrücken. Dann folgt, als Ausdruck des magnetischen Vektors,

$$(73)\quad \mathfrak{H} = \frac{e}{rc^2}[\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}_1]\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 + \frac{e}{cr^2}[\mathfrak{v}\mathfrak{r}_1]\left\{1 - \beta^2 + \frac{1}{c^2}(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r})\right\}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^3.$$

Die Formeln (72) und (73) stellen das elektromagnetische Feld einer beliebig bewegten Punkt-

ladung dar. Die elektrische Feldstärke setzt sich aus zwei Vektoren zusammen. Der erste Vektor ist der Beschleunigung der Punktladung zur Zeit t' entgegengerichtet. Der zweite Vektor ist parallel zu

$$\mathfrak{R} = r\left\{\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{v}}{c}\right\} = \mathfrak{r} - \mathfrak{v}\frac{r}{c}. \tag{73a}$$

Um diesen Vektor geometrisch zu interpretieren, gehen wir auf die Abbildung 2 des vorletzten Paragraphen zurück. Wir haben es hier allerdings nicht wie dort mit gleichförmiger, sondern mit ungleichförmiger Bewegung zu tun. Betrachten wir indessen, statt der wirklichen Bewegung, eine solche, die gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ erfolgt, welche die Punktladung gerade zur Zeit t' des Entsendens (im Punkte E') besaß, so wird sie während der Latenszeit $\frac{r}{c}$ die Strecke $E'E = \mathfrak{v}\cdot\frac{r}{c}$ beschreiben. $\mathfrak{R}$ wird dann der Vektor EP der Figur 2, der von dem gleichzeitigen Orte des Elektrons nach dem Aufpunkte hin gezogen ist. Diesem Radiusvektor parallel weist der zweite Bestandteil des elektrischen Vektors. Bei einer wirklich gleichförmigen Bewegung geht er in (67d) über.

Den magnetischen Vektor können wir in der Form schreiben:

$$\mathfrak{H} = [\mathfrak{r}_1 \mathfrak{E}]; \tag{73b}$$

derselbe steht mithin senkrecht auf dem vom Orte des Entsendens E' nach dem Aufpunkte hin gezogenen Radiusvektor, und auf dem elektrischen Vektor.

Wir sind nunmehr in der Lage, den allgemeinen Ausdruck der elektromagnetischen Kraft anzugeben, welche die Punktladung e auf eine zweite, zur Zeit t den Aufpunkt P mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ passierende Punktladung e' ausübt. Diese Kraft ist, der Grundgleichung (V) gemäß,

$$e'\mathfrak{F} = e'\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}'\mathfrak{H}]\right\}.$$

Durch Einführung von (73b) erhalten wir

$$e'\mathfrak{F} = e'\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\left[\mathfrak{v}'[\mathfrak{r}_1\mathfrak{E}]\right]\right\}$$

und erkennen, daß die Kraft in der Ebene der Vektoren $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{E}$ liegt. Nach Regel (δ) in Bd. I, S. 452 können wir auch schreiben

$$e'\mathfrak{F} = e'\left\{\mathfrak{E}\left(1 - \frac{\mathfrak{v}'_r}{c}\right) + \frac{\mathfrak{r}_1}{c}(\mathfrak{v}'\mathfrak{E})\right\}. \tag{73c}$$

Wir können diese Kraft mit K. Schwarzschild[51]) als „elementare elektrodynamische Kraft“ bezeichnen. Dieselbe hängt ab von Geschwindigkeit und Beschleunigung der Ladung e zur Zeit des Entsendens und von der Geschwindigkeit der Ladung e', auf welche die Kraft wirkt, zur Zeit des Eintreffens der Erregung.

In der Fernwirkungstheorie der Elektrodynamik stellte man ein Elementargesetz für die Wechselwirkung zweier elektrischer Ladungen an die Spitze und suchte auf dieses die ganze Theorie zu begründen. Wir haben, den Vorstellungen der Maxwellschen Theorie gemäß, die einfache und exakte Grundlage der Elektrodynamik in den Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes gesehen. Als entfernte Folgerung jener Grundgleichungen hat sich nunmehr ein Elementargesetz für die Wechselwirkung zweier Elektronen ergeben; dasselbe ist indessen weder einfach noch in Strenge gültig. Wissen wir doch, daß das wirkende Elektron nur dann als Punktladung betrachtet werden darf, wenn die Bedingungen (63a) und (63b) erfüllt sind. Nur in dem durch diese Bedingungen eingeschränkten Gültigkeitsbereiche wird man mit dem Elementargesetze (73c) operieren dürfen. Innerhalb dieses Bereiches kann man, wenn die Bewegung des ersten Elektrons vorgegeben ist, aus Gleichung (70) für jeden Ort des zweiten Elektrons die zugehörige Zeit t' des Entsendens, und aus (73c) die zur Zeit t auf das zweite Elektron ausgeübte Kraft ermitteln. Um aber die Rückwirkung auf das erste Elektron berechnen zu können, muß man die Beschleunigung kennen, welche diese Kraft dem zweiten Elektron erteilt; hierfür reichen jedoch die bisherigen Entwickelungen keineswegs aus. Vielmehr werden wir zur Berechnung der Bewegung eines Elektrons bei gegebener Kraft erst im nächsten Kapitel die Hilfs-

mittel gewinnen. Dort werden wir auf die Grundgleichungen (I) bis (V) zurückgehen, und in einfachen Fällen näherungsweise gültige Lösungen derselben ermitteln. Solange uns die Lösung des „Einelektronproblemes“ noch unbekannt ist, kann uns das Gesetz der elementaren elektrodynamischen Kraft nur von geringem Nutzen sein. Es bestimmt zwar die Kraft, aber nicht die Bewegung, welche sich die beiden Elektronen gegenseitig mitteilen; es führt nicht einmal zur Aufstellung der Differentialgleichungen des „Zweielektronenproblemes“.

Wir kehren zurück zu den Formeln für das elektromagnetische Feld. Nach (73b) ist

$$[\mathfrak{H}\mathfrak{r}_1] = -\Big[\mathfrak{r}_1\,[\mathfrak{r}_1\mathfrak{E}]\Big] = \mathfrak{E} - \mathfrak{r}_1\,(\mathfrak{r}_1\mathfrak{E}).$$

Da nun nach (72) sich ergibt

$$(\mathfrak{r}_1\mathfrak{E}) = -\frac{e(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r})}{r^2c^2}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 + \frac{e}{r^2}\left(1-\frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)\left\{1-\beta^2+\frac{(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r})}{c^2}\right\}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^3,$$

so folgt, mit Rücksicht auf (70a):

$$(\mathfrak{r}_1\mathfrak{E}) = \frac{e}{r^2}(1-\beta^2)\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2,$$

und somit

$$\mathfrak{E} = [\mathfrak{H}\mathfrak{r}_1] + \frac{\mathfrak{r}_1 e}{r^2}(1-\beta^2)\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2, \tag{73d}$$

eine Formel, die der Formel (73b) als Gegenstück gegenübertritt.

In der Wellenzone, wo die Feldstärken umgekehrt proportional der Entfernung r abnehmen, vereinfachen sich die Ausdrücke (72, 73) der Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$. Es wird

$$\mathfrak{E} = -\frac{e\dot{\mathfrak{v}}}{rc^2}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 + \frac{e}{rc^2}(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}_1)\left\{\mathfrak{r}_1-\frac{\mathfrak{v}}{c}\right\}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^3.$$

Berücksichtigen wir, daß nach (70a)

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1-\frac{\mathfrak{v}_r}{c}} = \frac{1}{1-\frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{r}_1)}{c}},$$

und daß daher

$$\left(\mathfrak{r}_1,\, \mathfrak{r}_1-\frac{\mathfrak{v}}{c}\right) = 1-\frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{r}_1)}{c} = 1 : \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)$$

ist, so erhalten wir

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{rc^2}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^3 \left\{ \left\{\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{v}}{c}\right\}(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}_1) - \dot{\mathfrak{v}}\left(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{v}}{c}\right) \right\},$$

oder, nach Regel (δ) in Bd. I, S. 452

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{rc^2}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^3 \left[\mathfrak{r}_1\left[\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{v}}{c}, \dot{\mathfrak{v}}\right]\right]. \tag{74}$$

Dabei ist

$$\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{v}}{c} = \frac{\mathfrak{R}}{r}, \tag{74a}$$

wo $\mathfrak{R}$ den durch (73a) definierten und oben geometrisch gedeuteten Vektor vorstellt. In der Wellenzone steht, nach (74), der elektrische Vektor senkrecht auf dem Radiusvektor $\mathfrak{r}$, der von dem Orte des Entsendens aus konstruiert ist. Er liegt in der Ebene der Vektoren $\mathfrak{R}$ und $\dot{\mathfrak{v}}$. Die Formel (73d) geht in der Wellenzone über in

$$\mathfrak{E} = [\mathfrak{H}\mathfrak{r}_1]; \tag{74b}$$

da andererseits allgemein (73b) gilt, so folgt: in der Wellenzone stellen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{r}_1$ ein System dreier wechselseitig aufeinander senkrechter Richtungen dar; der elektrische Vektor ist dem Betrage nach dem magnetischen gleich. Der Strahlvektor

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = \frac{c}{4\pi}\left[\mathfrak{E}\,[\mathfrak{r}_1\mathfrak{E}]\right] = \mathfrak{r}_1 \frac{c}{4\pi}\mathfrak{E}^2 \tag{74c}$$

weist parallel dem von der Punktladung aus gezogenen Radiusvektor.

Es liegen demnach hier durchaus dieselben Verhältnisse vor wie in der Wellenzone eines ruhenden Dipols (Vgl. § 9). Die jetzt erhaltenen Formeln müssen natürlich, wenn man zu langsamer Bewegung des Elektrons übergeht, in die damals aufgestellten Formeln (54) übergehen. Das trifft in der Tat zu; denn nehmen wir $|\mathfrak{v}|$ klein gegen c an und setzen demgemäß $\frac{\partial t'}{\partial t} = 1$, so ergibt (74) denselben Ausdruck von $\mathfrak{E}$, welcher dort aus (54) und (54a) folgte. Die nunmehr ge-

wonnenen allgemeinen Formeln für die Feldstärken der entsandten Wellen unterliegen nicht den Einschränkungen, unter denen wir dort das Problem der Lichtstrahlung behandelten. Die hier abgeleiteten Relationen bestimmen die Wellenstrahlung, die von einem beschleunigten Elektron ausgesandt wird, auch dann, wenn die Geschwindigkeit des Elektrons von der Ordnung der Lichtgeschwindigkeit wird. Nur die Überlichtgeschwindigkeit, die unmittelbare Nachbarschaft der Lichtgeschwindigkeit sowie der Fall einer außerordentlich raschen, stoßartigen Geschwindigkeitsänderung sind durch die Bedingung (63b), die allen unseren Entwickelungen zugrunde liegt, ausgeschlossen. In den beiden nächsten Paragraphen werden wir weitere Folgerungen aus unseren Resultaten ableiten. Wir werden die gesamte Energie und Bewegungsgröße berechnen, die von einer rasch bewegten Punktladung ausgestrahlt wird, und werden alsdann die Rückwirkung der Strahlung auf die bewegte Ladung, in allgemeinerer Weise als im § 9, bestimmen.

§ 14. Theorie des bewegten leuchtenden Punktes.

Die Kenntnis der Energie und der Bewegungsgröße, die ein beliebig rasch bewegtes Elektron bei einer Geschwindigkeitsänderung ausstrahlt, ist, entsprechend der Mannigfaltigkeit der von der Elektronentheorie umfaßten Vorgänge, in mehrfacher Hinsicht von Wichtigkeit. Erstens kann man auf Grund dieser Kenntnis sich ein Urteil darüber bilden, inwieweit es gestattet ist, bei einer ungleichförmigen Elektronenbewegung die Energie und die Bewegungsgröße als vom bewegten Elektron mitgeführt anzusehen. Bei einer stationären geradlinigen Bewegung ist das stets gestattet; diese stellt eine reine Konvektionsstrahlung dar. Die ungleichförmige Bewegung ist keine reine Konvektionsstrahlung, ein Teil der Energie und Bewegungsgröße wird dabei in Wellenstrahlung verwandelt. Bei wenig beschleunigten „quasistationären“ Bewegungen kommt jedoch die ausgestrahlte Energie und Bewegungsgröße gegenüber der mitgeführten kaum in Betracht, sie kann bei manchen

Aufgaben, z. B. bei der Ermittelung der Beschleunigung und Ablenkung der Elektronen durch äußere Felder, ganz vernachlässigt werden. Wann diese Vernachlässigung gestattet ist und wann nicht, das kann man erst dann beurteilen, wenn man die ausgestrahlten Anteile der Energie und der Bewegungsgröße kennt.

Treffen die im Kathodenstrahle bewegten Elektronen auf die Antikathode, so werden sie vermutlich, in das Innere eindringend, von den Molekülen der wägbaren Materie wiederholt aus ihrer Bahn abgelenkt. Hier wird die entsandte Wellenstrahlung von Bedeutung; nach der Stokes-Wiechertschen Hypothese ist sie mit der von der Antikathode ausgehenden Röntgenstrahlung identisch (vgl. § 3). Diese Beziehung zur Theorie der Röntgenstrahlen verleiht den Entwickelungen dieses Paragraphen ebenfalls ein gewisses Interesse.

Drittens aber ist die Kenntnis der allgemeinen Gesetze der Wellenstrahlung einer beschleunigten Punktladung für die Optik bewegter Körper von Bedeutung. Wir haben in § 9 ein elektromagnetisches Modell des ruhenden lichtentsendenden Moleküles kennen gelernt; wir nahmen an, daß es aus einem ruhenden positiven und einem schwingenden negativen Elektron besteht, und zeigten (§ 10), daß die normale Form des Zeeman-Effektes durch dieses denkbar einfachste elektromagnetische Modell erklärt wird. Hat man es nun mit einem bewegten Molekül zu tun, so wird man in konsequenter Verfolgung jener Vorstellung ein positives und ein negatives Elektron sich denken müssen; die Bewegung des positiven ist durch die Bewegung des Moleküles bestimmt, während das negative Elektron um das bewegte positive schwingt. Ein solcher bewegter und gleichzeitig schwingender elektrischer Dipol stellt das einfachste Modell des bewegten leuchtenden Punktes dar. Vorzugsweise mit Rücksicht auf das Problem des bewegten leuchtenden Punktes werden wir in diesem Paragraphen unsere Ansätze verfolgen.

Bevor wir dazu übergehen, wollen wir unsere Theorie zu einigen allgemeineren Prinzipien in Beziehung setzen, die für

die Optik bewegter Körper von fundamentaler Wichtigkeit sind. Wir denken uns wieder den ruhenden Aufpunkt P und den bewegten Dipol, der jetzt mit dem bewegten leuchtenden Punkte identifiziert wird; wir verstehen unter t' die Zeit, zu der das Licht von dem bewegten Punkte ausgesandt wird, unter t die Zeit, zu der es den ruhenden Punkt P erreicht. Diese beiden Zeitpunkte sind durch die Relation (64a) verknüpft; aus ihr leiteten wir die Beziehung (64c) ab; wir wollen dieselbe schreiben

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{1 - \beta \cos \varphi}, \tag{75}$$

indem wir mit β das Verhältnis der Geschwindigkeit $|\mathfrak{v}|$ des leuchtenden Punktes zur Lichtgeschwindigkeit bezeichnen und mit φ den Winkel, den zur Zeit (t') des Entsendens der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ mit dem nach dem Aufpunkte hin gezogenen Radiusvektor $\mathfrak{r}$ einschloß. Das in dem Zeitelemente dt' von dem bewegten leuchtenden Punkte entsandte Licht passiert den ruhenden Punkt P in dem durch (75) bestimmten Zeitelement dt.

Die Gleichung (75) stellt die allgemeine Fassung des sogenannten „Dopplerschen Prinzipes“ für eine bewegte Lichtquelle dar. Wir gelangen zu der gewöhnlichen Fassung dieses Prinzipes, indem wir die Gleichung auf den Fall periodischer Schwingungen des lichtentsendenden Dipols anwenden; wir bezeichnen mit τ', ν' Schwingungsdauer und Frequenz der Schwingungen des Dipols, mit τ, ν hingegen diejenige Schwingungsdauer und Frequenz, welche der ruhende Beobachter in P wahrnimmt. Erfolgt die translatorische Bewegung des leuchtenden Punktes während einer Schwingung merklich gleichförmig und geradlinig, so gilt die Beziehung (75), welche die Zeitelemente des Entsendens mit denen des Auffangens verknüpft, auch für die gesamte Dauer der in der Lichtquelle bzw. in dem ruhenden Aufpunkte P stattfindenden Schwingungen; es wird

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{\nu}{\nu'} = \frac{1}{1 - \beta \cos \varphi}, \tag{75a}$$

und das ist eben die gewöhnliche Fassung des Dopplerschen Prinzipes: Die Schwingungsdauer τ der wahrgenommenen Schwingungen wird verkleinert, wenn der leuchtende Punkt dem Beobachter sich nähert (φ ein spitzer Winkel), sie wird vergrößert, wenn der leuchtende Punkt sich vom Beobachter entfernt (φ ein stumpfer Winkel). Bei Annäherung der bewegten Lichtquelle werden demnach alle Spektrallinien nach der violetten, bei Entfernung nach der roten Seite des Spektrums verschoben.

Das gilt, wenn der Beobachter ruht. Bewegt er sich dagegen mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}^*$, so braucht die Welle, die in der Zeit dt den ruhenden Punkt P passiert, die Zeit

$$dt^* = \frac{c\,dt}{c - \mathfrak{v}_r^*} = \frac{dt}{1 - \beta^* \cos\varphi^*}. \tag{75b}$$

$$\left\{\beta^* = \frac{|\mathfrak{v}^*|}{c}, \quad \varphi^* = \sphericalangle\, \mathfrak{r}, \mathfrak{v}^*\right\},$$

um über den bewegten Punkt hinwegzustreichen. Es gilt folglich

$$\frac{dt^*}{dt'} = \frac{1 - \beta\cos\varphi}{1 - \beta^*\cos\varphi^*}. \tag{75c}$$

Dieses ist die allgemeinste Fassung des Dopplerschen Prinzipes. Sie fußt im Grunde nur auf der Relation (64a); diese aber sagt nichts anderes aus, als daß die Lichtfortpflanzung im Raume nach allen Seiten hin mit der gleichen Geschwindigkeit erfolgt, und daß das Licht seine Geschwindigkeit weder infolge Bewegung der Lichtquelle noch infolge der Bewegung des Beobachters ändert. Nur diese Grundvoraussetzung der elektromagnetischen Lichttheorie kommt bei der Ableitung des Dopplerschen Prinzipes ins Spiel. Es sind demnach nur die Feldgleichungen für den Äther, nicht die sonstigen Voraussetzungen der Elektronentheorie, die dem Dopplerschen Prinzipe zugrunde liegen.

Für periodische Lichtschwingungen bestimmen sich die Schwingungsdauer τ^* und die Frequenz ν^*, welche der bewegte Beobachter wahrnimmt, folgendermaßen:

$$\frac{\tau^*}{\tau'} = \frac{\nu'}{\nu^*} = \frac{1 - \beta\cos\varphi}{1 - \beta^*\cos\varphi^*}. \tag{75d}$$

Bewegen sich Lichtquelle und Beobachter einander parallel mit einer nach Richtung und Betrag konstanten Geschwindigkeit, so ist

$$\beta^* = \beta, \quad \varphi^* = \varphi;$$

es folgt demnach aus (75c, d)

$$\frac{dt^*}{dt'} = 1, \quad \tau^* = \tau', \quad \nu^* = \nu'. \tag{75e}$$

Bei gemeinsamer Translationsbewegung der Lichtquelle und des Beobachters fällt die Dopplersche Korrektion fort. Der bewegte Punkt P wird in der gleichen Zeit dt' von der Welle überstrichen, in der die Welle von der bewegten Lichtquelle entsandt wurde. Dieser Satz findet seine Anwendung auf das Licht irdischer Lichtquellen, welches von irdischen Beobachtern wahrgenommen wird; er lehrt, daß die Schwingungsdauer des wahrgenommenen Lichtes mit der Dauer der in der Lichtquelle stattfindenden Schwingungen übereinstimmt.

Die zur Zeit t' vom leuchtenden Punkte ausgehende Störung wird zur Zeit t eine Kugelfläche vom Radius $r = c(t - t')$ einnehmen. Wir wählen die Zeit t so groß, daß die Kugel sich bereits bis zur Wellenzone ausgedehnt hat. Hier sind die Feldstärken diejenigen, die wir am Schlusse des vorigen Paragraphen kennen lernten. Da die Beträge der Feldstärken einander gleich sind, so ist die elektrische Energiedichte der magnetischen gleich; die gesamte Energiedichte ist

$$\frac{1}{8\pi}\left\{\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\right\} = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}^2.$$

Wir bezeichnen mit $d\omega$ den körperlichen Winkel, unter dem ein Flächenelement der Kugel vom Mittelpunkte aus gesehen wird. Die Breite der in der Zeit dt' entsandten Welle beträgt cdt, da die mit Lichtgeschwindigkeit forteilende Welle in der Zeit dt über den ruhenden Aufpunkt forteilt: dabei ist dt durch dt' gemäß dem Dopplerschen Prinzip zu bestimmen (Gl. 75). Die Energie der im Zeitelemente dt' entsandten Welle beträgt demnach

$$\frac{r^2 c}{4\pi}\int d\omega\, \mathfrak{E}^2 dt = dt' \frac{r^2 c}{4\pi}\int d\omega\, \mathfrak{E}^2 \frac{dt}{dt'}.$$

Dieselbe ist zwischen zwei exzentrischen Kugelflächen enthalten; die Kugelflächen expandieren sich mit Lichtgeschwindigkeit; dabei nimmt $\mathfrak{E}^2$ umgekehrt proportional zu r^2 ab, so daß die gesamte Energie des Wellenimpulses bei der Ausbreitung im Raume sich nicht ändert. Diese Energie ist in der Zeit dt' von der bewegten Lichtquelle in den Raum entsandt worden. Die in der Zeiteinheit ausgestrahlte Energie beträgt

$$-\frac{dW}{dt'} = \frac{r^2 c}{4\pi}\int d\omega\, \mathfrak{E}^2 \frac{dt}{dt'}. \tag{76}$$

Wir können die Strahlung des leuchtenden Punktes auch auf einem anderen Wege berechnen, nämlich auf Grund des Poyntingschen Satzes. Der Poyntingsche Vektor weist nach Gleichung (74c) parallel dem Kugelradius; es wird mithin seine in der Richtung des Radius genommene Komponente mit seinem Betrage identisch:

$$\mathfrak{S}_r = S = \frac{c}{4\pi}\mathfrak{E}^2. \tag{76a}$$

Der Poyntingsche Satz bestimmt nun (vgl. § 4) den Energiestrom, der in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit einer ruhenden Fläche hindurchtritt. Dieser „absolute Energiestrom" ist gleich der Normalkomponente des Vektors $\mathfrak{S}$. Um mit Hilfe des Poyntingschen Satzes die ausgestrahlte Energie zu bestimmen, müssen wir den leuchtenden Punkt durch eine ruhende Fläche einschließen; wir wählen zweckmäßigerweise eine Kugel, welche zur Zeit t gerade mit der zur Zeit t' entsandten Kugel koinzidiert. Dabei dürfen wir aber nicht übersehen, daß die Zeit, während deren die in der Zeit dt' von dem bewegten leuchtenden Punkte entsandte Welle durch die Kugel tritt, nicht an allen Punkten der Kugel die gleiche ist. Sie bestimmt sich, gemäß dem Dopplerschen Prinzip, für die verschiedenen Punkte der Kugel in verschiedener Weise; es ist eben die Zeit, die wir oben (in Gl. 75) mit dt bezeichneten. Will man mit Hilfe des Poyntingschen Satzes die Energie bestimmen, die von einem bewegten leuchtenden Punkte entsandt wird, so hat man die Zeit,

während deren die Welle durch die Elemente der ruhenden Fläche tritt, dem Dopplerschen Prinzipe gemäß zu berechnen. Die in der Zeit dt' entsandte Strahlung wird dann, nach (76a),

$$r^2 \int d\omega S \, dt = dt' \frac{r^2 c}{4\pi} \int d\omega \, \mathfrak{E}^2 \frac{dt}{dt'} \cdot$$

Man sieht sofort, daß für die sekundliche Strahlung der bewegten Lichtquelle ein Ausdruck folgt, der mit (76) genau übereinstimmt.

Man kann nun aber auch statt der ruhenden Fläche eine dem leuchtenden Punkte parallel mitbewegte Fläche zugrunde legen. Für eine solche fällt, wie wir oben zeigten, die Dopplersche Korrektion fort. Die in der Zeit dt entsandte Welle tritt in dem gleichen Zeitintervall dt' durch die gleichförmig mitbewegte Fläche. Auf eine bewegte Fläche ist aber der Poyntingsche Satz nicht ohne weiteres anzuwenden. Es ist vielmehr zu berücksichtigen, daß zu dem absoluten elektromagnetischen Energiestrom, der nach der Poyntingschen Theorie im Raume stattfindet, derjenige Energiestrom tritt, der allein eine Folge der Bewegung der Fläche ist. Der letztere beträgt pro Flächeneinheit

$$\mathfrak{v}_n \frac{1}{8\pi} \left\{ \mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2 \right\},$$

wenn $\mathfrak{v}_n$ die parallel der äußeren Normalen genommene Komponente der Geschwindigkeit der bewegten Fläche ist; denn die Energie, die infolge der Bewegung der Fläche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit tritt, ist gleich $\mathfrak{v}_n$, multipliziert mit der Energiedichte; sie tritt bei der Bewegung von außen nach innen; $\mathfrak{S}_n$, die Normalkomponente des Poyntingschen Vektors, gibt dagegen den durch die Veränderung des Feldes allein bedingten, von innen nach außen tretenden Energiestrom an. Die Differenz

$$\mathfrak{S}_n - \frac{\mathfrak{v}_n}{8\pi} \left\{ \mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2 \right\} \tag{76b}$$

stellt den Energiestrom durch die bewegte Fläche, oder, wie wir sagen wollen, den „relativen Energiestrom“ dar.

Die Anwendung auf unsere, den gleichförmig bewegten leuchtenden Punkt einschließende mitbewegte Kugel ergibt, da die Geschwindigkeit der Kugel mit ihrer Normalen den Winkel φ einschließt, und da in der Wellenzone $\mathfrak{E}^2 = \mathfrak{H}^2$ ist, gemäß (76a)

$$\frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}^2(c - |\mathfrak{v}| \cos\varphi) = \frac{c}{4\pi}\mathfrak{E}^2(1 - \beta\cos\varphi)$$

als Wert des relativen Energiestromes. Die in der Zeiteinheit durch die ganze Kugel hindurchtretende Energie wird demnach

$$\frac{r^2 c}{4\pi}\int d\omega\,\mathfrak{E}^2(1 - \beta\cos\varphi);$$

dieser Ausdruck stimmt, nach (75), wiederum genau mit dem in (76) erhaltenen Werte für die in der Sekunde ausgestrahlte Energie überein.

Die sinngemäße Anwendung des Poyntingschen Satzes ergibt demnach in jedem Falle den richtigen Wert für die Strahlung, die von der bewegten Lichtquelle entsandt wird. Dabei kann man eine ruhende oder eine mitbewegte Fläche der Anwendung des Poyntingschen Satzes zugrunde legen. Im ersteren Falle ist die Dopplersche Korrektion zu berücksichtigen; im letzteren Falle fällt zwar die Dopplersche Korrektion fort, es ist jedoch der Poyntingsche Satz mit Rücksicht auf die Bewegung der Fläche zu korrigieren.

Das Dopplersche Prinzip und der Poyntingsche Satz sind die Grundpfeiler der Strahlungstheorie. Derjenige, der sich mit ihnen nicht gründlich vertraut gemacht hat, ist den Problemen der Optik bewegter Körper nicht gewachsen. Denn es wird ihm nicht gelingen, zwischen der Skylla des Dopplerschen Prinzipes und der Charybdis des Poyntingschen Satzes unversehrt hindurchzusteuern.

Neben der ausgesandten Energie ist für die Mechanik des bewegten leuchtenden Punktes die ausgesandte Bewegungsgröße von Wichtigkeit. Wie wir in § 5 allgemein gezeigt haben, ist die Dichte der elektromagnetischen Bewegungsgröße dem durch c^2 dividierten Strahlvektor gleich. In der Wellenzone

des leuchtenden Punktes ist mithin, nach (74c), die Dichte der Bewegungsgröße

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{r}_1 \frac{1}{4\pi c} \mathfrak{E}^2.$$

Dieser Vektor ist an Stelle der Energiedichte $\frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}^2$ in die Formel (76) einzusetzen, um die in der Zeiteinheit von dem bewegten leuchtenden Punkte entsandte Bewegungsgröße zu erhalten:

$$(77) \qquad -\frac{d\mathfrak{G}}{dt'} = \frac{r^2}{4\pi}\int d\omega\, \mathfrak{r}_1 \mathfrak{E}^2 \frac{dt}{dt'}.$$

In (76) und (77) ist unter $\mathfrak{E}$ die Feldstärke der vom bewegten leuchtenden Punkte entsandten Wellen zu verstehen. Handelt es sich um eine gleichförmige geradlinige Bewegung des leuchtenden Punktes, so ist nach der Vorstellung, die wir uns von dem Vorgange in der Lichtquelle machten, das positive Elektron in gleichförmiger, geradliniger Bewegung begriffen, während das negative Elektron kleine Schwingungen um das positive ausführt. Wir wollen voraussetzen, daß die Geschwindigkeit der Schwingungsbewegung klein ist gegen diejenige der gemeinsamen Translation. Alsdann ist unter $\mathfrak{v}$ in (74) der konstante Geschwindigkeitsvektor der bewegten Lichtquelle zu verstehen. Der daselbst auftretende Vektor (vgl. 73a)

$$(77a) \qquad \mathfrak{R} = r\left\{\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{v}}{c}\right\} = \mathfrak{r} - \mathfrak{v}\frac{r}{c}$$

gewinnt in diesem Falle eine vereinfachte Bedeutung. Es ist (vgl. Abb. 2 in § 12) der Radiusvektor, der nach dem Aufpunkte von dem gleichzeitigen Orte der Lichtquelle aus gezogen ist.

Das gleichförmig bewegte positive Elektron trägt nichts zur Strahlung bei; denn die Feldstärken des von ihm erregten Feldes nehmen (vgl. § 12) mit dem Quadrate des Abstandes ab und verschwinden in der Wellenzone gegen diejenigen des schwingenden negativen Elektrons. Wir können mithin für $\mathfrak{E}$ den Ausdruck (74) einführen. Dabei ist $\frac{\partial t'}{\partial t}$ dasselbe (vgl. 70a), was wir jetzt als Dopplersche Korrektion bezeichnet und, auf einen

festgehaltenen Aufpunkt uns beziehend, $\frac{dt'}{dt}$ geschrieben haben. Nach (75) wird daher

$$(77\text{b})\qquad \mathfrak{E} = \frac{e}{rc^2(1-\beta\cos\varphi)^3}\left[\mathfrak{r}_1\left[\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{v}}{c}, \dot{\mathfrak{v}}\right]\right].$$

Unter $\mathfrak{v}$ ist dabei die konstante Geschwindigkeit des leuchtenden Punktes zu verstehen, unter $\dot{\mathfrak{v}}$ die Beschleunigung des schwingenden negativen Elektrons. Es ist zu betonen, daß die obigen Einschränkungen sich nur auf die Anwendung beziehen, die wir von unseren Formeln machen. Handelt es sich um die Energie und Bewegungsgröße, die von einem einzelnen beschleunigten Elektron ausgesandt werden, so sind unsere Formeln in dem Bereiche gültig, den wir bereits in § 11 umgrenzten; $\mathfrak{v}$ und $\dot{\mathfrak{v}}$ stellen dann die Geschwindigkeit und die Beschleunigung dar, welche dem Elektron zur Zeit t' des Entsendens erteilt wurden. Nur die Anwendung auf die Theorie des bewegten schwingenden Dipols gründet sich auf die erwähnte vereinfachende Annahme, daß der periodische Teil von $\mathfrak{v}$ klein ist gegen den konstanten, die Translationsgeschwindigkeit des Dipols darstellenden Teil.

Nach Regel (δ) in Bd. I, S. 452 ist

$$\left[\mathfrak{r}_1\left[\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{v}}{c}, \dot{\mathfrak{v}}\right]\right] = \left\{\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{v}}{c}\right\}(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}_1) - \dot{\mathfrak{v}}(1-\beta\cos\varphi).$$

Berücksichtigt man nun, daß

$$(77\text{c})\qquad \left(\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{v}}{c}\right)^2 = \frac{\mathfrak{R}^2}{r^2} = 1 + \beta^2 - 2\beta\cos\varphi,$$

so erhält man

$$(77\text{d})\qquad \mathfrak{E}^2 = \frac{e^2}{r^2c^4(1-\beta\cos\varphi)^6}\Big\{\dot{\mathfrak{v}}^2(1-\beta\cos\varphi)^2 - (\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}_1)^2(1-\beta^2) + \frac{2}{c}(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{v})(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}_1)(1-\beta\cos\varphi)\Big\},$$

wobei übrigens, nach (74c), durch $\mathfrak{E}^2$ zugleich der Strahlvektor bestimmt ist:

$$(77\text{e})\qquad \mathfrak{S} = \mathfrak{r}_1 \frac{c}{4\pi}\mathfrak{E}^2.$$

Wir ziehen nun zunächst zwei spezielle Fälle in Betracht, nämlich erstens den Fall, daß die Schwingungen des negativen

Elektrons parallel, und zweitens den, daß sie senkrecht zur Bewegungsrichtung der Lichtquelle erfolgen.

I. Longitudinal schwingender Dipol.

Hier gilt

$$(\dot{\mathfrak{p}}\mathfrak{r}_1)^2 = \dot{\mathfrak{p}}^2 \cos^2\varphi,$$

$$\frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{p}}\mathfrak{v})(\dot{\mathfrak{p}}\mathfrak{r}_1) = \dot{\mathfrak{p}}^2\beta\cos\varphi.$$

Es wird daher aus (77d) nach einigen Umformungen

$$\mathfrak{E}^2 = \frac{e^2\dot{\mathfrak{p}}^2\sin^2\varphi}{r^2c^4(1-\beta\cos\varphi)^6}. \tag{78}$$

Die Einführung in (76) und (77) ergibt, bei Berücksichtigung von (75),

$$-\frac{dW_1}{dt'} = \frac{e^2\dot{\mathfrak{p}}^2}{4\pi c^3}\int\frac{d\omega\sin^2\varphi}{(1-\beta\cos\varphi)^5} \tag{78a}$$

für die ausgestrahlte Energie, und

$$-\frac{d\mathfrak{G}_1}{dt'} = \frac{e^2\dot{\mathfrak{p}}^2}{4\pi c^4}\int\frac{d\omega\,\mathfrak{r}_1\sin^2\varphi}{(1-\beta\cos\varphi)^5} \tag{78b}$$

für die ausgestrahlte Bewegungsgröße.

II. Transversal schwingender Dipol.

Hier gilt

$$(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{p}}) = 0 \quad \text{und} \quad (\dot{\mathfrak{p}}\mathfrak{r}_1)^2 = \dot{\mathfrak{p}}^2\sin^2\varphi\cos^2\zeta,$$

wenn ζ den Winkel der Ebenen der Vektoren $(\mathfrak{v}, \dot{\mathfrak{p}})$ und $(\mathfrak{v}, \mathfrak{r}_1)$ anzeigt, φ, ζ demnach Polarkoordinaten der Einheitskugel sind. Es wird

$$\mathfrak{E}^2 = \frac{e^2\dot{\mathfrak{p}}^2}{r^2c^4(1-\beta\cos\varphi)^6}\left\{(1-\beta\cos\varphi)^2-(1-\beta^2)\sin^2\varphi\cos^2\zeta\right\}. \tag{79}$$

Die Einführung in (76) und (77) ergibt

$$-\frac{dW_2}{dt'} = \frac{e^2\dot{\mathfrak{p}}^2}{4\pi c^3}\int d\omega\left\{\frac{1}{(1-\beta\cos\varphi)^3} - (1-\beta^2)\cos^2\zeta\frac{\sin^2\varphi}{(1-\beta\cos\varphi)^5}\right\}, \tag{79a}$$

$$-\frac{d\mathfrak{G}_2}{dt'} = \frac{e^2\dot{\mathfrak{p}}^2}{4\pi c^4}\int d\omega\,\mathfrak{r}_1\left\{\frac{1}{(1-\beta\cos\varphi)^3} - (1-\beta^2)\cos^2\zeta\frac{\sin^2\varphi}{(1-\beta\cos\varphi)^5}\right\} \tag{79b}$$

für die bei transversalen Schwingungen stattfindende Strahlung von Energie und von Bewegungsgröße.

Was die ausgestrahlte Bewegungsgröße anbelangt, so erkennt man ohne weiteres, daß nur die der Bewegungsrichtung parallele Komponente von Null verschieden sein kann. In der Tat, betrachten wir zwei Punkte der Einheitskugel, die sich in bezug auf die Bewegungsrichtung spiegelbildlich entsprechen, d. h. dasselbe φ und ein um 180^0 verschiedenes ξ besitzen, so sind die den beiden Punkten zugehörigen Einheitsvektoren $\mathfrak{r}_1$ in (78 b) mit demselben Ausdruck multipliziert und ebenso in (79 b). Es zerstören sich also die Beiträge der betreffenden Elemente der Einheitskugel hinsichtlich der zu $\mathfrak{v}$ senkrechten Komponenten, und es bleibt nur die zu $\mathfrak{v}$ parallele Komponente übrig. Führen wir die neue Integrationsvariable

$$u = -\cos\varphi$$

ein, wodurch

$$d\omega = du\, d\xi$$

wird, so ergibt die Integration nach ξ:

$$-\frac{dW_1}{dt'} = \frac{e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{2c^3}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{du(1-u^2)}{(1+\beta u)^5}, \tag{79c}$$

$$-\frac{d\mathfrak{G}_1}{dt'} = \mathfrak{v}\frac{e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{2c^5\beta}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{du(-u)(1-u^2)}{(1+\beta u)^5}, \tag{79d}$$

$$-\frac{dW_2}{dt'} = \frac{e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{2c^3}\left\{\int\limits_{-1}^{+1}\frac{du}{(1+\beta u)^3} - \frac{1-\beta^2}{2}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{du(1-u^2)}{(1+\beta u)^5}\right\}, \tag{79e}$$

$$-\frac{d\mathfrak{G}_2}{dt'} = \mathfrak{v}\frac{e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{2c^5\beta}\left\{\int\limits_{-1}^{+1}\frac{du(-u)}{(1+\beta u)^3} - \frac{1-\beta^2}{2}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{du(-u)(1-u^2)}{(1+\beta u)^5}\right\}. \tag{79f}$$

Zur Auswertung der Integrale schreitend, setzen wir abkürzungsweise

$$\varkappa^2 = 1-\beta^2. \tag{80}$$

Es gilt

$$\int_{-1}^{+1} \frac{du}{(1+\beta u)^2} = \frac{2}{\varkappa^2},$$

daher

$$(80\text{a}) \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{du\,(-u)}{(1+\beta u)^3} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\beta}\int_{-1}^{+1} \frac{du}{(1+\beta u)^2} = \frac{2\beta}{\varkappa^4}.$$

Ferner findet man leicht

$$(80\text{b}) \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{du}{(1+\beta u)^3} = \frac{2}{\varkappa^4},$$

und folglich

$$\int_{-1}^{+1} \frac{du\,u^2}{(1+\beta u)^5} = \frac{1}{3\cdot 4}\frac{d^2}{d\beta^2}\int_{-1}^{+1} \frac{du}{(1+\beta u)^3} = \frac{2(1+5\beta^2)}{3\varkappa^8};$$

da außerdem

$$\int_{-1}^{+1} \frac{du}{(1+\beta u)^5} = \frac{2(1+\beta^2)}{\varkappa^8}$$

ist, so wird schließlich

$$(80\text{c}) \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{du(1-u^2)}{(1+\beta u)^5} = \frac{4}{3\varkappa^6}.$$

Andererseits ergibt sich aus (80a):

$$\int_{-1}^{+1} \frac{du\,u^2}{(1+\beta u)^4} = \frac{1}{3}\frac{d}{d\beta}\int_{-1}^{+1} \frac{du(-u)}{(1+\beta u)^3} = \frac{2(1+3\beta^2)}{3\varkappa^6},$$

und mit Rücksicht auf die leicht abzuleitende Beziehung:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{du}{(1+\beta u)^4} = \frac{2(3+\beta^2)}{3\varkappa^6},$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{du\,(1-u^2)}{(1+\beta u)^4} = \frac{4}{3\varkappa^4},$$

woraus endlich folgt:

$$(80\text{d})\qquad \int_{-1}^{+1}\frac{du(-u)(1-u^2)}{(1+\beta u)^5} = \frac{1}{4}\frac{d}{d\beta}\int_{-1}^{+1}\frac{du(1-u^2)}{(1+\beta u)^4} = \frac{4\beta}{3\varkappa^6}.$$

Nach (79c, d) und (80c, d) wird die von longitudinalen Schwingungen des Dipols ausgestrahlte Energie und Bewegungsgröße:

$$(81)\qquad -\frac{dW_1}{dt'} = \frac{2e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{3c^3\varkappa^6},$$

$$(81\text{a})\qquad -\frac{d\mathfrak{G}_1}{dt'} = \mathfrak{v}\frac{2e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{3c^5\varkappa^6}.$$

Aus (79e, f) hingegen, in Verbindung mit (80a bis d), folgt die von transversalen Schwingungen des Dipols ausgestrahlte Energie und Bewegungsgröße:

$$(81\text{b})\qquad -\frac{dW_2}{dt'} = \frac{2}{3}\frac{e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{c^3\varkappa^4},$$

$$(81\text{c})\qquad -\frac{d\mathfrak{G}_2}{dt'} = \mathfrak{v}\frac{2}{3}\frac{e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{c^5\varkappa^4}.$$

Es ergibt sich also, bemerkenswerterweise, die Strahlung bei transversalen Schwingungen im Verhältnis $\varkappa^2 = 1 - \beta^2$ kleiner als bei longitudinalen Schwingungen. Bei langsamer Bewegung, wenn β^2 gegen 1 zu vernachlässigen ist, kommt natürlich dieser Unterschied nicht in Betracht. Alsdann gehen die Formeln (81) und (81b) in die Hertzsche Formel (55) für die Strahlung eines ruhenden Dipols über.

Die Formeln (81a, c) zeigen an, daß der bewegte leuchtende Punkt fortgesetzt elektromagnetische Bewegungsgröße in den Raum hinaussendet, und zwar überwiegt die der Bewegungsrichtung parallele Komponente. Da nun die Summe der im ganzen Raume enthaltenen Bewegungsgröße, elektromagnetische und mechanische zusammen, den Ergebnissen des § 5 zufolge konstant sein muß, falls eine äußere Kraft an der Lichtquelle nicht angreift, so nimmt die Bewegungsgröße der Lichtquelle

selbst pro Sekunde um den entsprechenden Betrag ab, d. h. es übt die ausgesandte Strahlung eine Reaktionskraft auf den leuchtenden Punkt aus, welche der Bewegung entgegenwirkt. Dieselbe beträgt:

(81d) $\mathfrak{K}_1^s = -\mathfrak{v}\frac{2}{3}\frac{e^2\overline{\dot{\mathfrak{v}}^2}}{c^5\varkappa^6}$ für longitudinale Schwingungen,

(81e) $\mathfrak{K}_2^s = -\mathfrak{v}\frac{2}{3}\frac{e^2\overline{\dot{\mathfrak{v}}^2}}{c^5\varkappa^4}$ für transversale Schwingungen.

Dabei sind natürlich Mittelwerte über eine Schwingung zu nehmen. Wir kommen in § 49 auf die Bedeutung dieses Ergebnisses zurück.

Wir gehen jetzt zu dem allgemeinen Falle über, wo das negative Elektron in der Lichtquelle ganz beliebige Schwingungen ausführt, so daß $\dot{\mathfrak{v}}$ mit $\mathfrak{v}$ einen ganz beliebigen, und auch im Verlaufe der Schwingungen periodisch wechselnden Winkel einschließt. Wir können dann setzen

$$\dot{\mathfrak{v}} = \dot{\mathfrak{v}}_1 + \dot{\mathfrak{v}}_2,$$

wo $\dot{\mathfrak{v}}_1$ zu $\mathfrak{v}$ parallel, $\dot{\mathfrak{v}}_2$ zu $\mathfrak{v}$ senkrecht ist. Führt man dieses in (77d) ein, so treten erstens Glieder auf, die zu $\dot{\mathfrak{v}}_1^2$ bzw. zu $\dot{\mathfrak{v}}_2^2$ proportional sind; diese führen zu den soeben berechneten Werten der von der longitudinalen Komponente bzw. von der transversalen Komponente ausgesandten Strahlung. Zweitens aber treten noch Glieder auf, die dem Produkte $|\dot{\mathfrak{v}}_1|\cdot|\dot{\mathfrak{v}}_2|$ proportional sind, nämlich

$$-2(\dot{\mathfrak{v}}_1\mathfrak{r}_1)(\dot{\mathfrak{v}}_2\mathfrak{r}_1)(1-\beta^2) = -2\cos\varphi\sin\varphi\cos\zeta\,|\dot{\mathfrak{v}}_1|\cdot|\dot{\mathfrak{v}}_2|\,(1-\beta^2),$$

und

$$\frac{2}{3}(\dot{\mathfrak{v}}_1\mathfrak{v})(\dot{\mathfrak{v}}_2\mathfrak{r}_1)(1-\beta\cos\varphi) = 2\beta\sin\varphi\cos\zeta\,(1-\beta\cos\varphi)\;|\dot{\mathfrak{v}}_1|\cdot|\dot{\mathfrak{v}}_2|$$

{ζ ist der Winkel, den die Ebenen der Vektoren ($\dot{\mathfrak{v}}, \mathfrak{v}$) und ($\mathfrak{r}, \mathfrak{v}$) einschließen, so daß φ, ζ Polarkoordinaten der Einheitskugel sind}.

Diese beiden Glieder ergeben zu $\mathfrak{E}^2$ den Beitrag

$$2\,\frac{|\dot{\mathfrak{v}}_1|\cdot|\dot{\mathfrak{v}}_2|\cdot e^2\sin\varphi\cos\zeta}{r^2c^4(1-\beta\cos\varphi)^6}(\beta-\cos\varphi).$$

Die entsprechenden Anteile der Ausdrücke (76) und (77), d. h. der Strahlung von Energie und Bewegungsgröße, sind

$$\frac{2e^2|\dot{\mathfrak{v}}_1|\cdot|\dot{\mathfrak{v}}_2|}{4\pi c^3}\int\frac{d\omega\sin\varphi\cos\zeta}{(1-\beta\cos\varphi)^5}(\beta-\cos\varphi)$$

und

$$\frac{2e^2|\dot{\mathfrak{v}}_1|\cdot|\dot{\mathfrak{v}}_2|}{4\pi c^4}\int\frac{d\omega\,\mathfrak{r}_1\sin\varphi\cos\zeta}{(1-\beta\cos)^5}(\beta-\cos\varphi).$$

Setzt man hier wieder $u=-\cos\varphi$, $d\omega=du d\zeta$, so verschwindet der erste Ausdruck ohne weiteres bei der Integration nach ζ.

Die Komponenten des im zweiten Gliede angegebenen Vektors sind gesondert zu behandeln. Es sind die Komponenten von $\mathfrak{r}_1$:

parallel zu $\mathfrak{v}$ gleich $\cos\varphi$,
parallel zu $\dot{\mathfrak{v}}_2$ gleich $\sin\varphi\cos\zeta$,
senkrecht zu $\mathfrak{v}$ und $\dot{\mathfrak{v}}_2$ gleich $\sin\varphi\sin\zeta$.

Die erste und dritte Komponente der ausgestrahlten Bewegungsgröße verschwindet ohne weiteres, wie die Integration nach ζ ergibt. Die zweite Komponente wird nach Ausführung dieser Integration zunächst:

$$\frac{e^2|\dot{\mathfrak{v}}_1|\cdot|\dot{\mathfrak{v}}_2|}{2c^4}\int_{-1}^{+1}\frac{du(1-u^2)}{(1+\beta u)^5}\cdot(\beta+u).$$

Gemäß (80c,d) hat auch dieses Integral den Wert Null. Wir haben also bewiesen: E s superponieren sich die Energie- und Impulsstrahlungen der longitudinalen und der transversalen Schwingungskomponenten des bewegten Dipols, was die Gesamtstrahlung anbelangt. Ist η der Winkel der Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\dot{\mathfrak{v}}$, so wird, nach (81) und (81b), die pro Sekunde ausgestrahlte Energie:

$$-\frac{dW}{dt'}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\mathfrak{v}}^2\left\{\frac{\cos^2\eta}{\varkappa^6}+\frac{\sin^2\eta}{\varkappa^4}\right\}, \tag{82}$$

wofür man, mit Rücksicht auf die Bedeutung (80) von $\varkappa^2$, auch schreiben kann:

$$(82\mathrm{a})\quad -\frac{dW}{dt'} = \frac{2}{3}\frac{e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{c^3\varkappa^6}\left\{1-\beta^2\sin^2\eta\right\} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3\varkappa^6}\left\{\dot{\mathfrak{v}}^2-\frac{1}{c^2}[\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}}]^2\right\},$$

oder auch

$$(82\mathrm{b})\quad -\frac{dW}{dt'} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\mathfrak{v}}^2\left\{\frac{1}{\varkappa^4}+\frac{\beta^2\cos^2\eta}{\varkappa^6}\right\} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left\{\frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^4}+\frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^6}\right\}.$$

Ebenso kann, nach (81a, c), für die **ausgestrahlte Bewegungsgröße** geschrieben werden:

$$(83)\qquad -\frac{d\mathfrak{G}}{dt'} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^5}\mathfrak{v}\left\{\frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^4}+\frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^6}\right\}.$$

Diese vom Verfasser[1][2] und unabhängig von O. Heaviside[16] gefundenen Formeln bestimmen die Energie und den Impuls, die von einem beliebig bewegten Elektron ausgestrahlt werden, in allen denjenigen Fällen, in denen es als Punktladung betrachtet werden darf.

Bezüglich ihrer mechanischen Rückwirkung auf die bewegte Lichtquelle kann die Strahlung durch die Kraft ersetzt werden

$$(83\mathrm{a})\qquad \mathfrak{K}^s = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^5}\mathfrak{v}\left\{\overline{\frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^4}}+\overline{\frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^6}}\right\},$$

welche im Mittel dieselbe Abnahme der Bewegungsgröße der Lichtquelle bedingt. Auf den Widerspruch gegen das erste Axiom der Newtonschen Mechanik, der hier hervortritt, kommen wir am Schlusse dieses Buches zurück.

Nach der in § 3 erwähnten Hypothese sind die Röntgenstrahlen nichts anderes als die Wellenstrahlung, welche beim Auftreffen der Kathodenstrahlen auf die Antikathode entsteht. Ist das Elektron bei seiner Hemmung oder Reflexion an der Antikathode immerhin so wenig beschleunigt, daß die Bedingung (63b) erfüllt ist, so kann die Energie der entsandten Röntgenstrahlen aus unserer Formel (82) berechnet werden. Falls die Deutung zutrifft, die von Haga und Wind[22] sowie von Sommerfeld[55] den in § 3 erwähnten Beugungsversuchen gegeben worden ist, ist die Impulsbreite der Röntgenstrahlen von der Ordnung 10^{-8} cm. Hiernach würde der Bereich, in

welchem das Elektron eine Geschwindigkeitsänderung erfährt, von der Größenordnung des Radius der molekularen Wirkungssphäre sein. Nehmen wir nun an, das Elektron habe die Geschwindigkeit $|\mathfrak{v}| = \frac{1}{3} c$, und es werde auf einem Wege von 10^{-8} cm, d. h. in der Zeit $\frac{1}{c} \cdot 10^{-8}$ Sekunde, seine Bewegungsrichtung umgekehrt, so ist die mittlere Beschleunigung gleich $\frac{2}{3} c^2 \cdot 10^8$. Der Nenner in (63b) ist $c(c - |\mathfrak{v}|) = \frac{2}{3} c^2$, und a, der Radius des Elektrons, wird sich unten von der Größenordnung 10^{-13} ergeben. Der Bruch, der klein gegen 1 sein soll, ist hiernach auf $2 \cdot 10^{-5}$ zu schätzen. Hieraus folgt, daß bei der Emission von Röntgenstrahlen der Impulsbreite 10^{-8} cm das Elektron noch als Punktladung betrachtet werden darf, und daß (82) die Energie der vom einzelnen Elektron entsandten Röntgenstrahlung bestimmt.

Ist aber die Impulsbreite der Röntgenstrahlen wesentlich geringer, so nähert man sich dem von J. J. Thomson[61]) angenommenen Falle einer plötzlichen Hemmung des im Kathodenstrahle bewegten Elektrons. Wir kommen auf die Theorie dieses Falles, die aus dem Rahmen der auf der Annahme einer Punktladung beruhenden Entwickelungen dieses Kapitels herausfällt, weiter unten zurück (vgl. § 25).

Den γ-Strahlen des Radiums, deren Eigenschaften denjenigen besonders stark durchdringender Röntgenstrahlen ähnlich sind, kommt wohl eine noch geringere Impulsbreite zu als den Röntgenstrahlen; die Geschwindigkeitsänderungen der Elektronen, denen die γ-Strahlen ihren Ursprung verdanken, erfolgen dann noch plötzlicher als diejenigen, die bei der Emission der Röntgenstrahlen stattfinden.

§ 15. Die Rückwirkung der Strahlung auf ein bewegtes Elektron.

Wir stellen uns in diesem Paragraphen die Aufgabe, die Rückwirkung, welche die entsandte Wellenstrahlung auf das entsendende Elektron ausübt, in allgemeiner Weise zu ermitteln.

Wir betrachten dabei eine Bewegung des Elektrons, deren Geschwindigkeit bis zur Zeit t_1' gleichförmig und geradlinig war, sodann im Zeitintervalle von t_1' bis t_2' nach Betrag und Richtung in beliebiger, aber stets in den Gültigkeitsbereich der Bedingung (63b) fallender Weise abgeändert wurde, und sodann von t_2' an wieder gleichförmig und geradlinig ist. In dem Zeitintervalle $t_1' < t' < t_2'$ wird das Elektron eine gewisse Energie und Bewegungsgröße in den Raum hinausgesandt haben. Die entsandte Energie ist, nach (82b)

$$W_{12} = -\int_1^2 \frac{dW}{dt'}\,dt' = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_1^2 dt' \left\{ \frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^4} + \frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^6} \right\},$$

und die entsandte Bewegungsgröße, nach (83)

$$\mathfrak{G}_{12} = -\int_1^2 \frac{d\mathfrak{G}}{dt'}\,dt' = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^5}\int_1^2 dt'\,\mathfrak{v} \left\{ \frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^4} + \frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^6} \right\}.$$

Dies ist die zeitliche Abnahme der Energie und Bewegungsgröße, welche das Elektron selbst, bzw. das von ihm mitgeführte elektromagnetische Feld, infolge der Strahlung erfahren hat; die verlorene Energie und Bewegungsgröße findet sich in den entsandten Wellen wieder.

Will man nun die Rückwirkung der Strahlung auf das Elektron durch eine Kraft $\mathfrak{K}^s$ zum Ausdruck bringen, so muß man diese Kraft so bestimmen, daß

$$(84)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_1^2 \mathfrak{K}^s\,dt' = -\,\mathfrak{G}_{12} \quad \text{und} \\ &\int_1^2 (\mathfrak{v}\mathfrak{K}^s)\,dt' = -\,W_{12} \end{aligned} \right.$$

ist, d. h. daß ihr Zeitintegral der ausgestrahlten Bewegungsgröße, ihr Wegintegral der ausgestrahlten Energie entgegengesetzt gleich ist. Die Reaktionskraft der Strahlung hat demnach die Gleichungen zu erfüllen

$$\int_1^2 \mathfrak{K}^s\, dt' = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^5}\int_1^2 dt'\, \mathfrak{v}\left\{\frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^4} + \frac{(\mathfrak{v}\,\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^6}\right\}, \tag{85}$$

$$\int_1^2 (\mathfrak{v}\,\mathfrak{K}^s)\, dt' = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_1^2 dt'\left\{\frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^4} + \frac{(\mathfrak{v}\,\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^6}\right\}. \tag{86}$$

Das muß selbstverständlich auch dann gelten, wenn irgendwelche äußeren Kräfte die Bewegung des Elektrons beeinflussen; auch dann muß der Impuls der Kraft $\mathfrak{K}^s$ der gesamten Bewegungsgröße, die Arbeit dieser Kraft der gesamten Energie der entsandten Wellen entgegengesetzt gleich sein. Es wird dann die Änderung der Bewegungsgröße und Energie des Elektrons durch die Reaktionskraft der Strahlung, im Verein mit den sonst noch vorhandenen Kräften, bestimmt. In welcher Weise, das wird das nächste Kapitel lehren (vgl. § 23).

Es kann auf den ersten Blick zweifelhaft erscheinen, ob es überhaupt möglich ist, beiden Gleichungen (85) und (86) durch einen und denselben Ausdruck der Reaktionskraft $\mathfrak{K}^s$ zu genügen. Um diesen Zweifel zu beseitigen, geben wir sofort einen Ausdruck an, von dem wir zeigen, daß er, unter den zugrunde gelegten Annahmen, den Gleichungen (85) und (86) Genüge leistet. Wir setzen

$$\mathfrak{K}^s = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left\{\frac{\ddot{\mathfrak{v}}}{\varkappa^2} + \frac{1}{c^2\varkappa^4}\mathfrak{v}\,(\mathfrak{v}\,\ddot{\mathfrak{v}}) + \frac{3\,\dot{\mathfrak{v}}}{c^2\varkappa^4}(\mathfrak{v}\,\dot{\mathfrak{v}}) + \frac{3\,\mathfrak{v}}{c^4\varkappa^6}(\mathfrak{v}\,\dot{\mathfrak{v}})^2\right\}. \tag{87}$$

Berücksichtigen wir, daß, nach (80), gilt

$$\frac{d\varkappa^2}{dt'} = \frac{d(1-\beta^2)}{dt'} = -\frac{2}{c^2}(\mathfrak{v}\,\dot{\mathfrak{v}}), \tag{87a}$$

so ergibt die partielle Integration der beiden ersten Glieder:

$$\int_1^2 dt'\,\frac{\ddot{\mathfrak{v}}}{\varkappa^2} = \left\{\frac{\dot{\mathfrak{v}}}{\varkappa^2}\right\}_1^2 - \int_1^2 dt'\,\frac{2\,\dot{\mathfrak{v}}\,(\mathfrak{v}\,\dot{\mathfrak{v}})}{c^2\varkappa^4},$$

$$\int_1^2 \frac{dt'\,\mathfrak{v}\,(\mathfrak{v}\,\ddot{\mathfrak{v}})}{c^2\varkappa^4} = \left\{\frac{\mathfrak{v}\,(\mathfrak{v}\,\dot{\mathfrak{v}})}{c^2\varkappa^4}\right\}_1^2 - \int_1^2 dt'\left\{\frac{\mathfrak{v}\,\dot{\mathfrak{v}}^2}{c^2\varkappa^4} + \frac{\dot{\mathfrak{v}}\,(\mathfrak{v}\,\dot{\mathfrak{v}})}{c^2\varkappa^4} + \frac{4\,\mathfrak{v}\,(\mathfrak{v}\,\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^4\varkappa^6}\right\}.$$

Berücksichtigen wir, daß bis zur Zeit t_1' und von der Zeit t_2' an der Beschleunigungsvektor $\dot{\mathfrak{v}}$ gleich Null sein soll, so erhalten wir

$$(87\text{b}) \int_1^2 dt' \left\{ \frac{\ddot{\mathfrak{v}}}{\varkappa^2} + \frac{\mathfrak{v}(\mathfrak{v}\ddot{\mathfrak{v}})}{c^2\varkappa^4} \right\} = -\int_1^2 dt' \left\{ \frac{\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}}^2}{c^2\varkappa^4} + \frac{3\dot{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})}{c^2\varkappa^4} + \frac{4\mathfrak{v}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^4\varkappa^6} \right\}.$$

Integriert man nun den Ausdruck (87) von $\mathfrak{K}^s$ nach der Zeit, wie es (85) verlangt, und formt die ersten beiden Glieder in dieser Weise um, so ergibt die Vereinigung mit den letzten beiden Gliedern nichts anderes als die rechte Seite von (85). Es ist also diese Gleichung in der Tat erfüllt.

Für die sekundliche Arbeit der Kraft $\mathfrak{K}^s$ folgt aus (87)

$$(87\text{c}) \qquad (\mathfrak{v}\mathfrak{K}^s) = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left\{ \frac{(\mathfrak{v}\ddot{\mathfrak{v}})}{\varkappa^4} + \frac{3(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^6} \right\}.$$

Da nun die partielle Integration liefert

$$\int_1^2 dt' \frac{(\mathfrak{v}\ddot{\mathfrak{v}})}{\varkappa^4} = \left\{ \frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})}{\varkappa^4} \right\}_1^2 - \int_1^2 dt' \left\{ \frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^4} + \frac{4(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^6} \right\},$$

und da $\dot{\mathfrak{v}}$ an den Grenzen des Integrationsintervalles verschwindet, so ergibt das Zeitingral der Arbeit in der Tat den in (86) rechts stehenden Ausdruck. Die in (87) angegebene Kraft $\mathfrak{K}^s$ erfüllt alle Bedingungen, welche der Reaktionskraft der Strahlung vorgeschrieben sind.

Es fragt sich indessen, ob durch die angegebenen Bedingungen (85) und (86) die Reaktionskraft der Strahlung überhaupt eindeutig bestimmt ist. Wir wollen auf den Nachweis der Eindeutigkeit nicht eingehen, sondern weiter unten in § 49 eine andere Ableitung des Ausdruckes (87) für die Rückwirkung der Strahlung geben.

Wir betrachten einige spezielle Fälle.

a) Gleichförmige Bewegung längs eines Kreises.

Es ist $(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}}) = 0$; der Beschleunigungsvektor hat den Betrag

$$|\dot{\mathfrak{v}}| = |\mathfrak{v}| \cdot \frac{|\mathfrak{v}|}{R},$$

wenn R der Radius des Kreises ist. Seine Richtung dreht sich wie diejenige des Geschwindigkeitsvektors mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{|\mathfrak{v}|}{R}$. Man sieht ohne weiteres ein, daß $\ddot{\mathfrak{v}}$ ein zu $\dot{\mathfrak{v}}$ senkrechter Vektor vom Betrage

$$|\ddot{\mathfrak{v}}| = |\dot{\mathfrak{v}}| \cdot \frac{|\mathfrak{v}|}{R} = |\mathfrak{v}| \cdot \frac{\mathfrak{v}^2}{R^2}$$

ist; er weist in die entgegengesetzte Richtung wie $\mathfrak{v}$, so daß man hat:

$$\ddot{\mathfrak{v}} = -\mathfrak{v} \cdot \frac{\mathfrak{v}^2}{R^2}.$$

Demnach ergibt (87)

$$\mathfrak{K}^s = -\mathfrak{v} \cdot \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{\mathfrak{v}^2}{\varkappa^4 R^2}, \quad \varkappa^2 = 1 - \beta^2. \tag{88}$$

Die Reaktionskraft ist der Bewegung entgegengerichtet; sie ist dem Quadrate des Kreisradius umgekehrt proportional und steigt mit wachsender Geschwindigkeit an wie

$$\frac{\beta^3}{(1-\beta^2)^2}.$$

Für die Arbeit der Reaktionskraft erhält man

$$\int_1^2 dt' (\mathfrak{v}\mathfrak{K}^s) = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3} \cdot \int_1^2 dt' \frac{\mathfrak{v}^4}{\varkappa^4 R^2} = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3} \cdot \int_1^2 dt' \frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^4},$$

was selbstverständlich mit (86) übereinstimmt. Die Übereinstimmung mit (85) ist nicht ohne weiteres ersichtlich. Sie wurde ja auch nur postuliert für eine Bewegung, die mit dem Werte Null von $\dot{\mathfrak{v}}$ beginnt und endigt, während dazwischen sich $\dot{\mathfrak{v}}$ stetig ändert. Es ist also, bevor das Elektron die Kreisbewegung beginnt, und nachdem es dieselbe beendigt hat, je ein Intervall anzunehmen, in welchem $\dot{\mathfrak{v}}$ von Null in stetiger Weise zu seinem, der Kreisbewegung entsprechenden Werte übergeht und wieder zum Werte Null zurückkehrt. Für den Kreisbogen, zusammen mit diesen beiden Intervallen, ist, wie aus dem gegebenen Beweise folgt, das Zeitintegral der Reaktionskraft durch (85) bestimmt.

Betrachten wir übrigens zwei Bewegungen, die um einen ganzen Umlauf voneinander verschieden sind, bei denen aber die Überführung in die Kreisbahn und die Zurückführung in die gleichförmige Bewegung längs genau derselben Bahn geschah, so folgt aus der Gültigkeit von (85) und (86) für die beiden betrachteten Bahnen: Für einen ganzen Umlauf müssen die Relationen (85) und (86) erfüllt sein. Das gilt übrigens ganz allgemein für periodische Bewegungen. Denkt man den oben gegebenen Beweis noch einmal durch, so sieht man ein, daß die von den Integrationsgrenzen herrührenden Terme sich auch dann fortheben, wenn zu den Zeiten t_1' und t_2' die Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\dot{\mathfrak{v}}$ die gleichen sind. Ist der Bewegungszustand an den Grenzen des Integrationsintervalles derselbe wie z. B. bei einer periodischen Bewegung zu zwei durch eine Periode getrennten Zeiten, so gelten die Relationen (85) und (86) ohne weiteres für die durch (87) gegebene Kraft. Bei der soeben behandelten Kreisbewegung z. B. ergibt das Zeitintegral von (88) für einen ganzen Umlauf den Wert Null, was mit (85) übereinstimmt.

b) Gleichförmige Bewegung längs einer Kreisschraube.

Wir setzen

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2,$$

indem wir unter $\mathfrak{v}_1$ den konstanten Vektor verstehen, welcher die Projektion von $\mathfrak{v}$ auf die Achse der Schraube darstellt, unter $\mathfrak{v}_2$ hingegen die Projektion von $\mathfrak{v}$ auf eine zur Schraubenachse senkrechte Ebene. Der Beschleunigungsvektor $\dot{\mathfrak{v}}$ liegt in dieser Ebene; er ist senkrecht zu $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$, mithin auch zu $\mathfrak{v}$ gerichtet, so daß $(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})$ auch hier gleich Null ist. Ferner gilt

$$\ddot{\mathfrak{v}} = \ddot{\mathfrak{v}}_2 = -\mathfrak{v}_2 \frac{\mathfrak{v}_2^2}{R_2^2},$$

wo R_2 der Radius der durch $\mathfrak{v}_2$ dargestellten Kreisbewegung ist. Wir erhalten aus (85)

$$\mathfrak{K}' = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left\{\mathfrak{v}_2 \cdot \frac{\mathfrak{v}_2^2}{\varkappa^2 R_2^2} + \mathfrak{v} \cdot \frac{\mathfrak{v}_2^4}{c^2 \varkappa^4 R_2^2}\right\}$$

oder, indem wir $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2$ einführen und

$$\beta_1^2 = \frac{\mathfrak{v}_1^2}{c^2}, \quad \beta_2^2 = \frac{\mathfrak{v}_2^2}{c^2},$$

daher

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = \beta^2$$

setzen:

$$(89) \qquad \mathfrak{K}^r = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left\{\mathfrak{v}_1 \cdot \frac{\beta_2^2}{\varkappa^4}\frac{\mathfrak{v}_2^2}{R_2^2} + \mathfrak{v}_2 \cdot \frac{(1-\beta_1^2)}{\varkappa^4}\frac{\mathfrak{v}_2^2}{R_2^2}\right\}.$$

Die Reaktionskraft der Strahlung ist die Resultante zweier Kräfte, von denen die erste der Bewegung längs der Schraubenachse, die zweite der Kreisbewegung in der zur Achse senkrechten Ebene entgegen wirkt. Sind die Abmessungen der Schraube solche, daß $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ von derselben Größenordnung werden, so überwiegt bei langsamer Bewegung die zweite, der Kreisbewegung entgegen wirkende Komponente. Bei raschen Bewegungen von der Ordnung der Lichtgeschwindigkeit jedoch kommt auch die erste Komponente in Betracht; es wird daher ein im homogenen magnetischen Felde sich sehr rasch bewegendes Elektron nicht nur in der Kreisbewegung um die magnetischen Kraftlinien, sondern auch in der translatorischen Bewegung längs der Kraftlinien gehemmt werden, falls die Rückwirkung der Strahlung in Betracht kommt.

Nach der Formel (7b) des § 2 ist bei der Schraubenbewegung im homogenen magnetischen Felde

$$\frac{\mathfrak{v}_2^2}{R_2^2} = \eta^2 \mathfrak{H}^2,$$

wo η die spezifische Ladung des Elektrons ist (η nimmt, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, mit wachsendem β ab). Es wird demnach (89)

$$(89\text{a}) \qquad \mathfrak{K}^r = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{\eta^2\mathfrak{H}^2}{\varkappa^4}\left\{\mathfrak{v}_1\beta_2^2 + \mathfrak{v}_2(1-\beta_1^2)\right\},$$

was bei Kreisbewegung senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien übergeht in

$$(89\text{b}) \qquad \mathfrak{K}^r = -\mathfrak{v}\,\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{\eta^2\mathfrak{H}^2}{\varkappa^4}.$$

Übrigens ist anzumerken, daß bei der Anwendung dieser Formeln auf die Kathodenstrahlen Vorsicht geboten ist. Es handelt sich bei den Kathodenstrahlen nicht um ein einzelnes Elektron, sondern um eine ganze Schar von Elektronen, die parallele Bahnen beschreiben. Da die ausgestrahlte Energie und Bewegungsgröße durch den Poyntingschen Vektor bestimmt wird und dieser das äußere Produkt der beiden Feldstärken ist, so superponieren sich im allgemeinen zwar die Felder der einzelnen Elektronen, aber nicht die ausgestrahlten Beträge der Energie und der Bewegungsgröße. Denkt man sich z. B. eine Anzahl von Elektronen auf einem Kreise in gleichen Abständen angeordnet und mit der gleichen Geschwindigkeit längs des Kreises bewegt, so wird die Ausstrahlung um so geringer, je größer die Zahl der Elektronen ist. Im Grenzfalle sehr vieler Elektronen strahlt diese Elektrizitätsbewegung wie ein stationärer Strom, d. h. sie strahlt überhaupt nicht. Hieraus folgt, daß auch die Rückwirkung der Strahlung auf das einzelne Elektron eine andere ist, wenn noch andere in der gleichen Weise bewegte Elektronen zugegen sind. Man muß dann bei der Behandlung der Strahlung und der Strahlungskräfte den Elektronenschwarm als Ganzes behandeln.

Anders liegen die Verhältnisse bei der Lichtemission. Nehmen wir an, daß in jedem lichtentsendenden Molekül nur ein einziges Elektron schwingt, so sind die Schwingungen der einzelnen Elektronen unabhängig voneinander. Die Phasendifferenz zweier Elektronenschwingungen ist eine ganz beliebige, und daher tritt bei der Superposition der entsandten Wellen ebenso oft eine Schwächung wie eine Verstärkung der Strahlung durch Interferenz ein. Bei der Mittelwertsbildung über eine große Zahl von Molekülen und über eine große Zahl von Schwingungen ergibt sich eine Strahlung, die gleich der Summe der Strahlungen der einzelnen Moleküle ist. Hier ist also das Ergebnis dasselbe, als wenn jedes Molekül für sich allein die Schwingungen ausgeführt und die Strahlung entsandt hätte; man kann in diesem Falle auch die Rückwirkung der Strahlung auf die Schwingung angeben, ohne auf die

Wechselwirkungen der Moleküle Rücksicht zu nehmen. Hat man es mit kleinen Schwingungen zu tun, deren Geschwindigkeit klein ist gegen die Lichtgeschwindigkeit, so ergibt (87)

$$\mathfrak{K}^{r} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\mathfrak{v}}$$

als Reaktionskraft der Strahlung. Das war der Ausdruck, den wir in § 9 (Gl. 58) abgeleitet hatten.

Übrigens liegt den Entwickelungen dieses Paragraphen wie denen der vorangehenden die Annahme einer Punktladung zugrunde. Dadurch ist die Lichtgeschwindigkeit und deren Nachbarschaft sowie selbstverständlich die Überlichtgeschwindigkeit ausgeschlossen. Es wäre durchaus unzulässig, wenn wir etwa aus dem Unendlichwerden der Reaktionskraft für $\beta = 1$ schließen würden, daß eine Strahlung aussendendes Elektron nicht mit Lichtgeschwindigkeit bewegt werden kann. Auf eine beschleunigte Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit sind unsere Formeln nicht mehr anzuwenden; denn das Elektron ist nicht als Punktladung anzusehen, sondern es besitzt, wie wir im nächsten Kapitel zeigen werden, endliche Abmessungen. In der unmittelbaren Nähe der Lichtgeschwindigkeit versagen demnach unsere durch die Bedingung (63b) in ihrer Gültigkeit eingeschränkten Formeln. Die Frage nach der Erreichung und Überschreitung der Lichtgeschwindigkeit kann nur auf Grund bestimmter Voraussetzungen über die Form und die Ladungsverteilung des Elektrons in Angriff genommen werden.

Drittes Kapitel.

Die Mechanik der Elektronen.

§ 16. Die Grundhypothesen der Dynamik des Elektrons und das elektromagnetische Weltbild.

Im vorigen Kapitel, wo wir die von einem beschleunigten Elektron entsandte Wellenstrahlung behandelten, kam nur das Feld in großen Entfernungen vom Elektron in Betracht. Nun

ist aber für die Rückwirkung auf das bewegte Elektron hauptsächlich die Energie und die Bewegungsgröße des Feldes, welches das Elektron unmittelbar umgibt, von Bedeutung Man gewinnt eine Vorstellung von der Art des Einflusses, welchen das mitgeführte Feld auf die Bewegung des Elektrons ausübt, indem man an die Analogie des elektrischen Leitungsstromes anknüpft.

Ein Leitungsstrom ist von einem magnetischen Felde umgeben, dessen Energie dem Quadrate der Stromstärke proportional ist. So erklärt es sich, daß dem Anwachsen der Stromstärke eine „elektromotorische Kraft der Selbstinduktion" entgegen wirkt, welche der zeitlichen Änderung der Stromstärke proportional ist. Der Konvektionsstrom, den das bewegte Elektron darstellt, wird gleichfalls von magnetischen Kraftlinien umschlungen; die magnetische Energie ist, bei langsamer Bewegung wenigstens, auch hier dem Quadrate der Stromstärke proportional. Da nun die Stromstärke in diesem Falle der Geschwindigkeit des Elektrons proportional ist, so wird der elektromotorischen Kraft der Selbstinduktion hier eine Kraft entsprechen, welche der Beschleunigung des Elektrons proportional und ihr entgegen gerichtet ist. Der Gedanke Maxwells, welcher die „elektrokinetische" Energie des elektrischen Stromes mit der kinetischen Energie bewegter träger Massen verglich (Bd. I, § 70), nimmt hier eine noch greifbarere Form an als beim Leitungsstrome. Jene vom magnetischen Felde herrührende, einer Beschleunigung des Elektrons entgegen wirkende Kraft entspricht in der Tat durchaus der Trägheitskraft der gewöhnlichen Mechanik; es wird mithin ein bewegtes elektrisches Teilchen infolge des mitgeführten elektromagnetischen Feldes eine träge Masse besitzen, welche man, zum Unterschiede von der trägen Masse wägbarer Teilchen, als „scheinbare" oder besser als „elektromagnetische" Masse bezeichnen kann. Bei den unmittelbar an Maxwell anknüpfenden englischen Forschern J. J. Thomson[58]) und O. Heaviside[14]) findet sich zuerst die Vorstellung einer solchen „scheinbaren Masse" der konvektiv bewegten Elektrizität.

Der Begriff der elektromagnetischen Trägheit gewann eine aktuelle Bedeutung, als man in den Kathodenstrahlen (vgl. § 2) rasch bewegte elektrische Teilchen kennen lernte. Wenn anders der Konvektionsstrom überhaupt eine magnetisches Feld erregt — und die Versuche von H. A. Rowland (vgl. Bd. I, § 99) konnten hieran kaum zweifeln lassen —, so mußten die im Kathodenstrahle bewegten Elektronen eine elektromagnetische Masse besitzen. Die allgemeinste zulässige Annahme war die, daß diese negativen Elektronen sowohl elektromagnetische Masse als auch „materielle" Masse besitzen. Dabei ist unter „materieller Masse" diejenige zu verstehen, welche der wägbaren Materie zukommt, und welche z. B. den elektrochemischen Ionen anhaftet. Wir haben indessen bereits in § 2 auf die Schwierigkeiten hingewiesen, welche vom atomistischen Standpunkte aus der Auffassung der Masse des negativen Elektrons als einer materiellen Masse entgegenstehen. Man wäre vor die Alternative gestellt, entweder den Kathodenstrahlteilchen an Stelle eines einzigen 2000 elektrische Elementarquanten zuzuschreiben, oder aber die Atome der wägbaren Materie nicht als unteilbar zu betrachten. Diese Schwierigkeiten werden keineswegs gehoben, wenn man die Trägheit der Elektronen zum Teil als materielle, zum Teil als elektromagnetische betrachtet. Sie verschwinden jedoch sofort, wenn man die Masse des negativen Elektrons als rein elektromagnetische Masse betrachtet. Auf die Möglichkeit einer solchen, alle überlieferten Anschauungen umwälzenden Lösung wurde von verschiedenen Seiten hingewiesen, und es wurde bemerkt, daß die Entscheidung der Frage von den Trägheitserscheinungen abhängt, welche die Elektronen zeigen, wenn sie mit noch größeren Geschwindigkeiten als in den Kathodenstrahlen sich bewegen. In der Tat, die materielle Masse wägbarer Teilchen muß, wenn anders die Axiome der gewöhnlichen Mechanik richtig sind, eine Konstante sein; sie muß unabhängig von der Geschwindigkeit sein, mit der die Bewegung erfolgt. Die elektromagnetische Masse hingegen, die von dem elektromagnetischen Felde herrührt, wird wie das Feld selbst

von der Geschwindigkeit abhängen, mit welcher das Elektron den Äther durchfliegt.

Gerade als die Erörterung der Frage bis zu diesem Punkte gelangt war, lernte man in den β-Strahlen des Radiums negative Elektronen kennen, die noch rascher als die Kathodenstrahlteilchen sich bewegen. Es zeigte nämlich W. Kaufmann[23]), daß die Geschwindigkeit für verschiedene Teilchen eine verschiedene ist, und daß das „Spektrum" von der halben Lichtgeschwindigkeit bis dicht an die Lichtgeschwindigkeit heran sich erstreckt. Auch stellten bereits die ersten Versuche Kaufmanns es außer Zweifel, daß die Trägheit dieser Teilchen mit wachsender Geschwindigkeit ansteigt. Hieran anknüpfend hat der Verfasser dieses Werkes es unternommen[1]), eine Dynamik des Elektrons auszuarbeiten, welche geeignet war, die Versuche Kaufmanns auf rein elektromagnetischer Grundlage zu deuten. Die erhaltenen Ergebnisse wurden durch W. Kaufmanns weitere Untersuchungen bestätigt, so daß bereits auf der Karlsbader Naturforscherversammlung (1902) ausgesprochen werden konnte: Die Masse des Elektrons ist rein elektromagnetischer Art.

In diesem Paragraphen sollen die Grundhypothesen dargelegt werden, auf denen diese Dynamik des Elektrons beruht.

Zu diesen Grundhypothesen gehören selbstverständlich die in § 4 entwickelten allgemeinen Feldgleichungen der Elektronentheorie (I bis IV) sowie der Lorentzsche Ansatz (V) für die elektromagnetische Kraft. Zu ihnen tritt die für die atomistische Theorie der Elektrizität fundamentale Vorstellung, daß die Gesamtladung e, die wir als elektrisches Elementarquantum bezeichnet haben (§ 1), über einen gewissen Bereich verteilt ist. Diesen Bereich nebst seiner Ladung nennen wir das „Elektron". Er kann als Ganzes im Raume bewegt, aber nicht geteilt werden. An der Elektrizität, die mit der Dichte ϱ über das Volumen des Elektrons verteilt ist, greift nun die durch die Grundgleichung (V) definierte elektromagnetische Kraft an. Dieselbe setzt sich aus zwei Teilen zusammen, erstens der elektromagnetischen Kraft des fremden Feldes, die

wir $\mathfrak{F}^a$ schreiben, und zweitens der vom Elektron auf sich selbst ausgeübten „inneren“ elektromagnetischen Kraft. Es ist für das Folgende bequem, diese letztere einfach $\mathfrak{F}$ zu schreiben. Daß man die „innere“ und die „äußere“ Kraft trennen kann, rührt von dem in der linearen Form der Feldgleichungen analytisch zum Ausdruck gebrachten Superpositionsprinzipe her; diesem Prinzipe zufolge überlagern sich die Felder $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}^a$, $\mathfrak{H}^a$, welche einerseits von dem betrachteten Elektron selbst, andererseits von den übrigen Elektronen erregt werden. Durch diese Felder aber bestimmen sich die auf die Einheit der Ladung berechneten inneren und äußeren elektromagnetischen Kräfte folgendermaßen:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}],$$

$$\mathfrak{F}^a = \mathfrak{E}^a + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}^a].$$

Da wir nun die Dynamik des Elektrons rein elektromagnetisch zu begründen beabsichtigen, so dürfen wir andere als elektromagnetische Kräfte überhaupt nicht einführen. Wir postulieren vielmehr: Es soll die resultierende Kraft und das resultierende Kraftmoment der an den Volumelementen des Elektrons angreifenden elektromagnetischen Kräfte verschwinden:

$$\text{(VI)} \qquad \int dv\varrho\{\mathfrak{F} + \mathfrak{F}^a\} = 0,$$

$$\text{(VIa)} \qquad \int dv\varrho[\mathfrak{r}, \mathfrak{F} + \mathfrak{F}^a] = 0.$$

Diese zu den allgemeinen Grundgleichungen (I bis V) der Elektronentheorie tretenden besonderen Grundgleichungen der Dynamik des Elektrons habe ich als die „dynamischen Grundgleichungen“ bezeichnet. Sie sagen aus, daß die inneren und die äußeren elektromagnetischen Kräfte sich an dem Elektron im Sinne der Mechanik starrer Körper das Gleichgewicht halten. Auf ihnen muß eine jede elektromagnetische Begründung der Dynamik des Elektrons fußen. Sobald man zuläßt, daß neben den elektromagnetischen Kräften noch

andere vorhanden sind, die eine Translation oder Rotation hervorzurufen streben, kann von einer elektromagnetischen Begründung überhaupt keine Rede mehr sein.

Wir müssen dem Elektron eine endliche Ausdehnung deshalb zuschreiben, weil für eine Punktladung die Feldstärken des von der Ladung selbst erregten Feldes und daher auch die innere elektromagnetische Kraft am Orte der Punktladung selbst dem Betrage nach unendlich und der Richtung nach unbestimmt wird. Dieser Umstand verbietet uns, in den dynamischen Grundgleichungen zur Grenze der Punktladung überzugehen. In der Tat wird, wie wir sehen werden, bei diesem Grenzübergang die elektromagnetische Energie sowohl wie die elektromagnetische Bewegungsgröße unendlich. Schreiben wir nun dem Elektron eine zwar kleine, aber doch endliche Ausdehnung zu, so können wir nicht umhin, das Elektron als einer Rotation fähig zu betrachten. Ein Gegenstück des ausdehnungslosen „materiellen Punktes" der analytischen Mechanik existiert in der elektromagnetischen Mechanik nicht. Die einfachste Annahme, die man über die Bewegungsfreiheit des Elektrons machen kann, ist die folgende: *Das Elektron ist einer Translation und einer Rotation fähig.* Die allgemeinste Bewegung des Elektrons wird dieser Annahme gemäß durch die „*kinematische Grundgleichung*"

$$\text{(VII)} \qquad \mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\mathfrak{r}]$$

dargestellt, welche der in der Kinematik des starren Körpers (Bd. I, § 9) gültigen Gleichung (Gl. 35, S. 27) vollkommen entspricht. *Diese unsere kinematische Grundgleichung sagt aus, daß die Elektrizität an den Volumelementen des Elektrons haftet wie die wägbare Materie an den Volumelementen des starren Körpers.* Es stellt in (VII) $\mathfrak{v}_0$ die Geschwindigkeit eines im Innern des Elektrons gewählten Bezugspunktes dar, $\mathfrak{r}$ den von ihm aus konstruierten Radiusvektor und $\mathfrak{u}$ die Drehgeschwindigkeit des Elektrons um den Bezugspunkt. Den sechs durch die kinematische Grundgleichung zugelassenen Freiheitsgraden stehen sechs aus den

dynamischen Grundgleichungen fließende Beziehungen gegenüber, ganz wie in der Mechanik starrer Körper.

Wenn wir die Kinematik des Elektrons der Kinematik des starren Körpers nachbilden, erreichen wir für die Dynamik des Elektrons ähnliche Vorteile, wie sie die analytische Mechanik durch Annahme starrer Verbindungen erzielt. Indem nämlich die analytische Mechanik der Kinematik der Massensysteme solche Bedingungsgleichungen zugrunde legt, zu deren Aufrechterhaltung keine Arbeitsleistung (weder eine positive noch eine negative) erforderlich ist, braucht sie Kräfte, welche die verkoppelten Massen aufeinander ausüben, nicht einzuführen. Sie kann diese Kräfte als Folge der angenommenen Bedingungsgleichungen auffassen; es ist aber überflüssig, von diesen Kräften zu reden, da dieselben niemals Arbeit leisten, weder bei der wirklichen Bewegung noch bei virtuellen Bewegungen. Daher kann die analytische Mechanik bei der Behandlung starrer Massensysteme davon absehen, eine innere „potentielle Energie“ der Körper heranzuziehen. Aus den Bedingungsgleichungen der bewegten Massen und ihrer kinetischen Energie ergeben sich ohne weiteres die Bewegungsgleichungen des Systemes. Dieser Grundgedanke der analytischen Mechanik Lagranges ist bekanntlich von Heinrich Hertz in seiner Darstellung der Prinzipien der Mechanik am konsequentesten durchgeführt worden. H. Hertz wünscht den Begriff der potentiellen Energie aus den Grundlagen der Mechanik zu verbannen. Er postuliert die Zurückführung der potentiellen Energie auf die lebendige Kraft verborgener Systeme träger Massen; diese Massen sollen durch „starre“ Verbindungen miteinander verkoppelt sein; alle Kräfte, auch anscheinende „Fernkräfte“, sollen in Wirklichkeit durch Mechanismen verborgener Massen übertragen sein, welche auch die anscheinend getrennten materiellen Körper miteinander verkoppeln. Nun sind jedoch die Verbindungen, welchen wir in der wirklichen Körperwelt begegnen, keineswegs „starr“. Auch die festen Körper besitzen die Eigenschaft der Elastizität, Reibung usf. Daher reichen für eine erschöpfende Darstellung der Bewegungsvorgänge die Ansätze der analytischen

Mechanik nicht aus; man muß vielmehr die thermischen Vorgänge berücksichtigen, welche die Bewegungen begleiten.

Dieser Einsicht verschließt sich Hertz keineswegs. Da er aber alle physikalischen Vorgänge, auch die thermischen, als Bewegungsvorgänge aufzufassen wünscht, so kann er nicht umhin anzunehmen, daß in der Welt der Atome die starren Verbindungen seiner Mechanik verwirklicht sind. In der Tat, wäre die Bewegung der Atome mit Reibungs- und Formänderungsarbeit verbunden, so wäre es logisch unmöglich, die Wärme der Körper als eine Art von Bewegung aufzufassen. Will man das mechanische Weltbild in folgerichtiger Weise zeichnen und dabei die potentielle Energie aus den Grundlagen der Mechanik verbannen, so muß man fordern, daß die kinematischen Zusammenhänge der kleinsten Teilchen „starr" im Sinne der Hertzschen Mechanik sind.

Wir haben die Bedeutung dieses mechanischen Weltbildes für die Elektrodynamik im ersten Bande dieses Werkes (§ 70) erörtert, als wir die Maxwellsche Ableitung der Induktionsgesetze aus den Lagrangeschen Gleichungen vortrugen. Wir erwähnten dort bereits, daß diese Maxwellsche Analogie der Selbstinduktion zur Massenträgheit nicht unbedingt zugunsten des mechanischen Weltbildes gedeutet zu werden braucht, sondern daß man mit demselben Rechte umgekehrt versuchen kann, die Massenträgheit aus den Gesetzen der Elektrodynamik abzuleiten und so die Mechanik elektromagnetisch zu begreifen. Wir sind jetzt zu dem Punkte gekommen, wo das „elektromagnetische Weltbild" auf seine Richtigkeit zu prüfen ist. Die elektromagnetische Masse des Elektrons ist nichts anderes als die Selbstinduktion des Konvektionsstromes. Ist die Dynamik des Elektrons rein elektromagnetisch begründet und die Trägheit der Elektronen auf ihre Selbstinduktion, d. h. auf die Rückwirkung ihres Feldes, zurückgeführt, so haben wir den Stützpunkt gewonnen, von dem aus wir die mechanische Naturanschauung in ihren Grundlagen erschüttern können. Wir können dann wagen, die kinetische und die potentielle Energie der Mechanik und alle Energieformen überhaupt als magne-

tische und elektrische Energie zu deuten und so ein elektromagnetisches Weltbild an die Stelle des mechanischen zu setzen.

Obwohl wir eine Tendenz verfolgen, welche derjenigen der Hertzschen Mechanik diametral entgegengesetzt ist, soll uns doch hinsichtlich der Folgerichtigkeit der Durchführung dieser Tendenz die Hertzsche Mechanik vorbildlich sein. Wollen wir an Stelle der kinetischen und der potentiellen Energie der Mechanik die elektromagnetische Energie setzen, so müssen wir der Dynamik der elektrischen Atome kinematische Verbindungen zugrunde legen, deren Aufrechterhaltung weder einen Energieverlust noch einen Energiegewinn mit sich bringt; sonst ist die gesamte elektromagnetische Energie des Feldes nicht konstant, und es wird die Einführung einer nicht elektromagnetischen Energieform doch wieder notwendig. Das elektromagnetische Weltbild kann nicht umhin, der Kinematik der Elektronen Bedingungsgleichungen zugrunde zu legen, welche den „starren“ Verbindungen der Hertzschen Mechanik entsprechen. Nur auf solchen kinematischen Grundgleichungen fußend, ist die Dynamik des Elektrons ohne logische Widersprüche elektromagnetisch zu begründen. Nur die Übereinstimmung der Ergebnisse einer so begründeten Dynamik des Elektrons mit dem Experimente kann zur weiteren Verfolgung des elektromagnetischen Weltbildes ermutigen. Die einfachste aller in den Rahmen der analytischen Mechanik fallenden Bedingungsgleichungen war es, die wir als kinematische Grundhypothese wählten. Auch über die Form des Elektrons werden wir meist die einfachste denkbare Annahme machen. Wir werden das Elektron als Kugel betrachten, mit einer in konzentrischen Schichten homogenen Verteilung der Ladung; insbesondere werden wir zwei Grenzfälle, nämlich die homogene Volumladung und die homogene Flächenladung, bevorzugen. Beide führen hinsichtlich der elektromagnetischen Masse zu demselben, mit den Versuchen Kaufmanns übereinstimmenden Ergebnisse. Erst dann, wenn künftige Experimente mit diesen speziellen Annahmen sich als unverträglich erweisen sollten, würde man zu

komplizierteren Annahmen über die Form und die Ladungsverteilung des Elektrons überzugehen geneigt sein. Man würde auch daran denken, dem Elektron mehr als sechs Grade der Freiheit zu geben; aber stets wären die kinematischen Verbindungen so zu wählen, daß sie als „starre“ Verbindungen im Sinne der Hertzschen Mechanik zu bezeichnen wären. Vorläufig allerdings erscheint der Übergang zu komplizierteren kinematischen Grundgleichungen unzweckmäßig.

Halten wir an der kinematischen Grundgleichung (VII) fest, so brauchen wir von „Kräften“, welche die Volumelemente des Elektrons aufeinander ausüben, überhaupt nicht zu reden. Die einzigen „Kräfte“, die in Frage kommen, sind die elektromagnetischen Kräfte, welche durch die Vektoren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^a$ bestimmt sind; diese Vektoren sind nur Hilfsgrößen, die definiert sind durch die elektromagnetischen Grundvektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ und durch den Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$. Die resultierenden Kräfte und Kraftmomente des äußeren und inneren Feldes allein sind es, die in die dynamischen Grundgleichungen (VI und VIa) eingehen. Von „Kräften“ aber, welche das Elektron zu deformieren bestrebt sind, spricht unsere Dynamik des Elektrons überhaupt nicht. Die kinematische Grundgleichung bedingt es, daß solche Kräfte niemals Arbeit leisten können; von unserem Standpunkte aus ist die Einführung solcher Kräfte überflüssig.

Anders liegt hingegen die Sache, wenn man die kinematische Grundgleichung (VII) fallen läßt und eine Formänderung des Elektrons als möglich ansieht. Dann müssen nicht nur die resultierenden Kräfte und Kraftmomente am Elektron im ganzen sich das Gleichgewicht halten, sondern es muß an jedem Volumelemente des Elektrons Gleichgewicht bestehen, da ja eine am Volumelemente haftende „materielle“ Masse nicht angenommen werden soll. Dann muß man schon für das ruhende Elektron annehmen, daß neben den elektrischen noch innere elastische Kräfte wirken, welche es verhindern, daß die Volumelemente ihrer gegenseitigen Abstoßung Folge leisten. Diese Kräfte müssen ganz enorme sein; denn

die elektrischen Kräfte, welche an der Oberfläche des Elektrons angreifen, übertreffen, weil die Abmessungen des Elektrons so außerordentlich klein sind, die experimentell herstellbaren elektrischen Kräfte um das Billionenfache. Bewegt sich nun das Elektron als Ganzes translatorisch oder rotatorisch, so werden die elektromagnetischen Kräfte abgeändert werden und mit ihnen die elastischen, derart, daß an jedem Volumelemente die elektrischen und die elastischen Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Die Abänderung der elastischen Kräfte wird von einer Formänderung begleitet sein. Der Translationsbewegung und der Rotationsbewegung wird sich demnach eine innere Formänderungsbewegung überlagern, die ihrerseits das innere Feld beeinflußt. Man hat, präzis gesprochen, neben den Gleichgewichtsbedingungen für die Volumelemente noch die Feldgleichungen (I bis IV) zu erfüllen und hat zu zeigen, daß die hinsichtlich der elastischen Kräfte gemachten Annahmen zu keinen Widersprüchen führen. Eine solche, nachgewiesenermaßen widerspruchsfreie Theorie eines deformierbaren Elektrons existiert bisher nicht. Sollte sie sich durchführen lassen und dem Experimente gegenüber sich gleichfalls bewähren, so wäre sie unserer Theorie gegenüber noch insofern im Nachteile, als sie gezwungen wäre, außer der elektromagnetischen Energie noch eine innere potentielle Energie von der Art der inneren Energie elastischer Körper einzuführen, deren Abnahme die von den elastischen Kräften geleistete Arbeit kompensiert. Man würde dann die Trägheitskräfte verbannt, aber dafür die weniger gut verstandenen elastischen Kräfte aus der Mechanik übernommen haben. Man würde die kinetische Energie der Elektronen auf die elektromagnetische Feldenergie und eine innere potentielle Energie zurückgeführt haben. Die Übereinstimmung einer solchen Dynamik des Elektrons mit dem Experimente wäre gewiß nicht als eine Bestätigung des elektromagnetichen Weltbildes aufzufassen.

Wir werden also in diesem Werke an der Hypothese des „starren“ Elektrons festhalten; auf Grund dieser Hypothese werden wir die Frage zur Entscheidung zu bringen suchen,

ob die Dynamik des Elektrons rein elektromagnetisch begründet und so die Konvektionsstrahlung freier Elektronen als rein elektrischer Vorgang aufgefaßt werden kann. Ein weiterer Schritt auf dem Wege der elektromagnetischen Weltanschauung wäre die Deutung der Kräfte, welche die Materie auf die Elektronen ausübt, z. B. der quasielastischen Kräfte (vgl. § 9), auf rein elektromagnetischer Basis. Der letzte Schritt endlich wäre die Auffassung der wägbaren Atome und Moleküle als Aggregate von Elektronen, eine Auffassung, welche die Trägheit der Materie ohne weiteres erklären würde, von der man aber auch fordern müßte, daß sie von den Molekularkräften und von den Gravitationskräften in befriedigender Weise Rechenschaft gäbe. Die Welt würde dann allein aus den positiven und negativen Elektronen und aus dem von ihnen im Raume erzeugten elektromagnetischen Felde bestehen, und alle Naturvorgänge wären als Konvektionsstrahlung der Elektronen oder als von ihnen entsandte Wellenstrahlung zu betrachten. Dieses elektromagnetische Weltbild ist bisher nur ein Programm; hoffen wir, daß die Arbeit der im Dienste dieses Programmes tätigen Forscher von weiteren Erfolgen gekrönt werden möge.

§ 17. Die Bewegungsgleichungen des Elektrons.

Ist das „äußere Feld" gegeben und die jeweilige Lage, Geschwindigkeit und Drehgeschwindigkeit des Elektrons, so sind die resultierende äußere Kraft

$$\mathfrak{K}^a = \int dv \varrho \mathfrak{F}^a = \int dv \varrho \left\{ \mathfrak{E}^a + \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \mathfrak{H}^a] \right\}, \tag{90}$$

und die resultierende äußere Drehkraft

$$\mathfrak{N}^a = \int dv \varrho [\mathfrak{r} \mathfrak{F}^a] = \int dv \varrho \left[\mathfrak{r}, \mathfrak{E}^a + \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \mathfrak{H}^a] \right] \tag{90a}$$

gleichfalls bestimmt. Für das kugelförmige Elektron wird man als Momentenpunkt den Mittelpunkt desselben wählen, und von diesem aus den Radiusvektor $\mathfrak{r}$ konstruieren. In der kinematischen Grundgleichung gibt dann $\mathfrak{v}_0$ die Geschwindigkeit

dieses Mittelpunktes, $\mathfrak{u}$ die Drehgeschwindigkeit des Elektrons um seinen Mittelpunkt an.

Nimmt man die Ladungsverteilung im Elektron nicht als allseitig symmetrisch an, so wird man als Momentenpunkt den durch die Gleichung

$$\int dv\varrho\mathfrak{r} = 0 \tag{90b}$$

definierten Punkt wählen, der dem „Massenmittelpunkte" der Mechanik entspricht, und der in diesem Falle schlechtweg als „Mittelpunkt des Elektrons" bezeichnet werden mag.

Bei reiner Translationsbewegung ($\mathfrak{u} = 0$) ist die äußere Kraft

$$\mathfrak{K}_1^a = \int dv\varrho\mathfrak{E}^a + \frac{1}{c}\left[\mathfrak{v}_0, \int dv\varrho\mathfrak{H}^a\right]. \tag{91}$$

Ist das äußere Feld innerhalb des vom Elektron eingenommenen Bereiches merklich homogen, so reduziert sich der Translationsbestandteil der äußeren Kraft auf

$$\mathfrak{K}_1^a = e\left\{\mathfrak{E}^a + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}_0\mathfrak{H}^a]\right\}. \tag{91a}$$

Die experimentell herstellbaren konstanten elektrischen und magnetischen Felder sind stets als homogen anzusehen auf Strecken von der Größenordnung eines Elektrondurchmessers; die von ihnen ausgeübte Kraft wird daher stets mit genügender Annäherung durch (91a) angegeben.

Die äußere Drehkraft ist bei reiner Translation

$$\mathfrak{N}_1^a = \int dv\varrho[\mathfrak{r}\mathfrak{E}^a] + \frac{1}{c}\int dv\varrho\left[\mathfrak{r}[\mathfrak{v}_0\mathfrak{H}^a]\right]. \tag{91b}$$

Dieser Ausdruck verschwindet für ein homogenes äußeres Feld, da hier sowohl $\mathfrak{E}^a$ wie $[\mathfrak{v}_0\mathfrak{H}^a]$ vor das Integralzeichen zu ziehen sind, gemäß (90b). Im homogenen Felde ist der Translationsbestandteil der äußeren Drehkraft gleich Null.

Dreht sich indessen das Elektron um seinen Mittelpunkt, so kommt im magnetischen Felde der Rotationsbestandteil der äußeren Kraft hinzu:

$$\mathfrak{K}_2^a = \frac{1}{c}\int dv\varrho\left[[\mathfrak{u}\mathfrak{r}], \mathfrak{H}^a\right],$$

welcher gemäß den Regeln (β) und (δ) in Bd. I, S. 452 zu schreiben ist

$$\mathfrak{K}_2^a = \frac{1}{c}\int dv\varrho\{-\mathfrak{u}(\mathfrak{r}\mathfrak{H}^a) + \mathfrak{r}(\mathfrak{u}\mathfrak{H}^a)\}. \tag{91c}$$

Der Rotationsbestandteil der äußeren Kraft verschwindet gleichfalls im homogenen magnetischen Felde.

Der Rotationsbestandteil der äußeren Drehkraft jedoch

$$\mathfrak{N}_2^a = \frac{1}{c}\int dv\varrho[\mathfrak{u}\mathfrak{r}](\mathfrak{r}\mathfrak{H}^a) = \frac{1}{c}\left[\mathfrak{u}, \int dv\varrho\mathfrak{r}(\mathfrak{r}\mathfrak{H}^a)\right] \tag{91d}$$

ist auch im homogenen magnetischen Felde im allgemeinen von Null verschieden.

Bei um den Mittelpunkt symmetrischer Verteilung der Elektrizität ist er dem äußeren Produkte aus der Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ und der Feldstärke $\mathfrak{H}^a$ proportional:

$$\mathfrak{N}_2^a = \xi[\mathfrak{u}\mathfrak{H}^a]. \tag{91e}$$

Der Koeffizient ξ findet sich nach einer einfachen Rechnung

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{ea^2}{5c} & \text{für Volumladung,} \\[2ex] \xi = \dfrac{ea^2}{3c} & \text{für Flächenladung,} \end{cases} \tag{91f}$$

wenn a der Radius des kugelförmigen Elektrons ist.

Führen wir die nunmehr als bekannt anzusehenden Vektoren $\mathfrak{K}^a$ und $\mathfrak{N}^a$ in die dynamischen Grundgleichungen (VI, VIa) ein, so lauten diese:

$$\mathfrak{K}^a + \int dv\varrho\mathfrak{F} = 0, \tag{92}$$

$$\mathfrak{N}^a + \int dv\varrho[\mathfrak{r}\mathfrak{F}] = 0. \tag{92a}$$

Es handelt sich nun darum, den Vektor $\mathfrak{F}$, d. h. die elektromagnetische Kraft des vom Elektron selbst erregten Feldes, zu ermitteln.

Wir haben bereits im ersten Kapitel (§ 8) in allgemeinster Weise die Fortpflanzung einer elektromagnetischen Störung be-

handelt. Wir haben gesehen, daß das Feld, welches zur Zeit t in irgendeinem Aufpunkte herrscht, sich zusammensetzt aus Beiträgen, welche eine mit Lichtgeschwindigkeit sich kontrahierende Kugel dem Aufpunkte zuführt. Und zwar hängen die elektromagnetischen Potentiale von der elektrischen Dichte und von der Dichte des Konvektionsstromes ab, welche die Kugel antrifft; die Feldstärken werden mithin von der Dichte, Geschwindigkeit und Beschleunigung der Elektrizität abhängen, über welche die Kugel hinweggestrichen ist. Das vom Elektron erregte Feld wird sich demnach durch ein Zeitintegral über die Latenszeit τ oder den Latensweg λ darstellen lassen. Auf diese allgemeine Darstellung des Feldes kommen wir weiter unten (§ 24) zurück.

In die Ausdrücke der inneren Kraft und Drehkraft gehen nun die Feldstärken ein, welche in dem gerade vom Elektron eingenommenen Bereiche herrschen, und die vom Elektron selbst erregt sind. Um sie direkt zu bestimmen, müßte man für jeden Punkt des Elektrons das Feld ermitteln und sodann die elektromagnetischen Kräfte, welche auf die einzelnen Volumelemente wirken, nach den Regeln der Mechanik starrer Körper zusammensetzen. Hat sich nun das Elektron vorher mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegt, so wird für jeden zur Zeit t in sein Inneres fallenden Aufpunkt das Feld abhängen von der Bewegung, welche das Elektron in einem endlichen, der Zeit t vorangegangenen Zeitintervalle ausgeführt hat, nämlich in dem Zeitintervalle, während dessen die mit Lichtgeschwindigkeit sich kontrahierende Kugel über das Elektron hinweggestrichen ist. Auch bei Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit wird das gleiche gelten; die Abweichung liegt darin, daß hier das Elektron von außen in die sich kontrahierende Kugel hineintritt. Nur wenn die Geschwindigkeit des Elektrons der Lichtgeschwindigkeit gleich ist oder um diese oszilliert, liegt ein Ausnahmefall vor. Im allgemeinen wird die elektromagnetische Kraft im Innern des Elektrons abhängen von der Geschwindigkeit und Beschleunigung, die das Elektron in einem endlichen, vorangegangenen Zeitintervalle erfahren hat. Das gleiche wird

von der resultierenden inneren Kraft und Drehkraft gelten. Wir kommen hierauf weiter unten (§ 26) zurück.

Aus diesen allgemeinen Überlegungen gewinnen wir eine Einsicht in den Sinn unserer dynamischen Grundgleichungen. Wir erkennen, daß diese Gleichungen im Grunde etwas ganz anderes aussagen, als die Prinzipien der gewöhnlichen Mechanik. Während die Mechanik starrer materieller Körper die zeitliche Änderung der jeweiligen Geschwindigkeit und Drehgeschwindigkeit durch die äußere Kraft und Drehkraft bestimmt, wenn die Gestalt und die Massenverteilung des Körpers gegeben ist, ist die Aussage der Grundgleichungen der Dynamik des Elektrons eine weit verwickeltere. Dieselben sind, streng genommen, Integralgleichungen, welche die Lage sowie die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Translation und Rotation, die in einem ganzen Zeitintervalle herrschen, zueinander in eine äußerst verwickelte Beziehung setzen. Man darf daher nicht hoffen, Bewegungsgleichungen zu erhalten, welche gleichzeitig in Strenge gültig sind, und ähnlich wie die Bewegungsgleichungen des starren Körpers die Beschleunigung der Translation und Rotation allein durch die jeweils herrschenden äußeren Kräfte bestimmen. Nur indem man spezielle Fälle herausgreift und sie passend idealisiert, kann man erwarten, zu übersichtlichen, für die Darstellung der beobachtbaren Bewegungen geeigneten Ergebnissen zu gelangen.

Dieses war das Ziel, welches ich bei meinen Untersuchungen über die Dynamik des Elektrons verfolgt habe. Ich habe nachgewiesen, daß die in den Kathodenstrahlen und den Becquerelstrahlen stattfindenden Elektronenbewegungen so wenig beschleunigt sind, daß sie als „quasistationär“ gelten können, d. h. daß das Feld des Elektrons merklich dem bei gleichförmiger Bewegung mitgeführten Feld entspricht (vgl. § 23). Für solche quasistationäre Translationsbewegungen bin ich zu Bewegungsgleichungen gelangt, welche von den in der Mechanik geltenden nicht so sehr verschieden sind. Hier läßt sich das Verhalten des Elektrons auch bei Geschwindigkeiten, die von der Ordnung der Lichtgeschwindigkeit, aber immerhin

kleiner als diese selbst sind, durch eine von der jeweiligen Geschwindigkeit abhängige „elektromagnetische Masse“ charakterisieren. Dabei ist jedoch eine andere träge Masse in Rechnung zu setzen, wenn es sich um Beschleunigung parallel der Bewegungsrichtung oder senkrecht zu ihr handelt. Beide Massen, die „longitudinale“ sowohl als auch die „transversale“, lassen sich mit Hilfe des elektromagnetischen Impulses (§ 5) in übersichtlicher Weise darstellen. In entsprechender Weise läßt sich aus dem elektromagnetischen Impulsmomente für quasistationäre Drehbewegungen ein „elektromagnetisches Trägheitsmoment“ ableiten.

Wir gewinnen die Grundlage für die Theorie der quasistationären Bewegungen des Elektrons, indem wir die elektromagnetische Bewegungsgröße des vom Elektron erregten Feldes einführen. Deren Dichte ist nach Gleichung (18):

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{c^2}\mathfrak{S} = \frac{1}{4\pi c}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]. \tag{93}$$

Der gesamte Impuls des Feldes beträgt

$$\mathfrak{G} = \int dv\,\mathfrak{g}, \tag{93a}$$

und der Drehimpuls

$$\mathfrak{Y} = \int dv[\mathfrak{r}\mathfrak{g}]. \tag{93b}$$

Die Umformungen, die zu den Ausdrücken (21) und (26a) für die resultierende Kraft und die resultierende Drehkraft eines beliebigen elektromagnetischen Feldes führten, gelten natürlich auch für das Feld eines einzelnen Elektrons; denn dieses Feld erfüllt eben die Grundgleichungen (I bis IV), auf denen jene Umformungen beruhten. Wir erhalten demnach als resultierende innere Kraft

$$\mathfrak{K} = \int dv\,\varrho\,\mathfrak{F} = -\frac{d\mathfrak{G}}{dt}. \tag{93c}$$

Bei der Berechnung des resultierenden Momentes des vom Elektron erregten Feldes ist zu beachten, daß als Momentenpunkt nicht wie in § 5 ein im Raume fester Punkt, sondern

der mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ bewegte Mittelpunkt des Elektrons gewählt wurde. Auf diesen Momentenpunkt soll auch das elektromagnetische Impulsmoment $\mathfrak{Y}$ bezogen werden. Wir können, da das Integral in (93b) über den ganzen Raum zu erstrecken ist, unter $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor verstehen, der vom Mittelpunkt des Elektrons aus nach einem im Raume festen Punkte gezogen ist; dann gilt:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = -\mathfrak{v}_0.$$

Hieraus folgt als zeitliche Änderung des Impulsmomentes

$$\frac{d\mathfrak{Y}}{dt} = \frac{d}{dt}\int dv\,[\mathfrak{r}\mathfrak{g}] = -[\mathfrak{v}_0\mathfrak{G}] + \int dv\left[\mathfrak{r}\frac{\partial\mathfrak{g}}{\partial t}\right].$$

Das zweite Glied der rechten Seite war es, auf welches sich die Umformungen des § 5 bezogen, die zu den Gleichungen (26) und (26a) führten; denn dieses Glied stellt die zeitliche Änderung des auf einen im Raume festen Momentenpunkt bezogenen Impulsmomentes dar.

Wir haben daher hier zu schreiben

$$\mathfrak{N} = -\int dv\left[\mathfrak{r}\frac{\partial\mathfrak{g}}{\partial t}\right].$$

Zwischen dem auf den bewegten Mittelpunkt des Elektrons bezogenen elektromagnetischen Impulsmomente $\mathfrak{Y}$ und dem resultierenden Momente der inneren elektromagnetischen Kräfte besteht demnach die Beziehung

$$\mathfrak{N} = \int dv\varrho\,[\mathfrak{r}\mathfrak{F}] = -[\mathfrak{v}_0\mathfrak{G}] - \frac{d\mathfrak{Y}}{dt}. \tag{93d}$$

Führen wir die Ausdrücke (93c, d) in die dynamischen Grundgleichungen (92, 92a) ein, so nehmen diese die Form an

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \mathfrak{K}^a, \tag{94}$$

$$\frac{d\mathfrak{Y}}{dt} + [\mathfrak{v}_0\mathfrak{G}] = \mathfrak{N}^a. \tag{94a}$$

Diese Form der dynamischen Grundgleichungen entspricht durchaus den Bewegungsgleichungen eines starren Körpers,

wenn Kraft und Impulsmoment auf einen mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ bewegten Momentenpunkt bezogen sind. Sie sind in der Tat formal identisch mit den Bewegungsgleichungen (46) und (48) des starren Körpers, die wir im ersten Bande (§ 12) kennen lernten. Sie beruhen ja auf den Impulssätzen, die für die Bewegungsgröße des elektromagnetischen Feldes ebenso gelten, wie für die an den wägbaren Körpern haftende Bewegungsgröße. Freilich läßt sich für die wägbaren Körper ohne weiteres der Impuls als Funktion der Geschwindigkeit und der Drehimpuls als Funktion der Drehgeschwindigkeit angeben. In der Dynamik des Elektrons hingegen gewinnt man die Beziehungen, welche den Impuls und das Impulsmoment mit der Geschwindigkeit und der Drehgeschwindigkeit verknüpfen, erst durch Integration der Feldgleichungen; erst nachdem das Feld der betreffenden Bewegung ermittelt ist, lassen sich die durch (93, 93a, b) definierten Integrale über den ganzen Raum auswerten, wodurch dann die Bewegungsgleichungen eine explizite, zur Bestimmung des Verlaufes der Bewegung geeignete Form annehmen.

Neben den Impulsgleichungen ist die Energiegleichung für die Dynamik des Elektrons von Bedeutung. Wir hatten dieselbe bereits in § 4 in allgemeiner Weise aus den Grundgleichungen der Elektronentheorie hergeleitet. W, die gesamte Energie des vom Elektron erregten Feldes, ist stets eine endliche, wenn wir bei der Verfolgung der Bewegung von einem anfangs ruhenden Elektron ausgehen und immer nur endliche äußere Kräfte auf das Elektron wirken lassen. Sie berechnet sich in diesem Falle aus den Feldstärken des vom Elektron erregten Feldes durch die Integration über den unendlichen Raum:

$$W = \int \frac{dv}{8\pi} \left\{ \mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2 \right\}. \tag{95}$$

Infolge der über den Anfangszustand gemachten Annahme können wir in der Energiegleichung, ebenso wie wir es bereits in § 5 in den Impulsgleichungen taten, die Oberflächenintegrale streichen. Rücken wir nämlich die Begrenzungsfläche

so weit fort, daß sie während des ganzen betrachteten Vorganges nicht von dem Felde erreicht wird, so findet eine Strahlung durch die Begrenzungsfläche hindurch nicht statt, und es wird (vgl. § 4)

(95a) $$\frac{dW}{dt} = -\frac{dA}{dt}.$$

Hier bezeichnet $\frac{dA}{dt}$ die Arbeitsleistung der „inneren" elektromagnetischen Kräfte $\mathfrak{F}$, die vom Felde des Elektrons selbst herrühren; es gilt

$$\frac{dA}{dt} = \int dv\, \varrho\, (\mathfrak{v}\mathfrak{F}) = \left(\mathfrak{v}_0, \int dv\, \varrho\, \mathfrak{F}\right) + \left(\mathfrak{u}, \int dv\, \varrho\, [\mathfrak{r}\mathfrak{F}]\right),$$

wie aus der kinematischen Grundgleichung (VII) im Verein mit der Regel (γ) der Formelzusammenstellung in Bd. I, S. 452, folgt. Mit Rücksicht auf die dynamischen Grundgleichungen (92a, b) ergibt dieses

(95b) $$\frac{dA}{dt} = -(\mathfrak{v}_0 \mathfrak{K}^a) - (\mathfrak{u} \mathfrak{N}^a).$$

Es ist demnach die Arbeit der inneren elektromagnetischen Kräfte entgegengesetzt gleich der Arbeit der äußeren elektromagnetischen Kräfte. Diese aus den Grundgleichungen unserer Dynamik des Elektrons folgende Beziehung würde nicht mehr erfüllt sein, wenn noch andere innere Kräfte, außer den elektromagnetischen, mitwirkten. Durch die Wahl der Grundhypothesen haben wir eben ausgeschlossen, daß solche Kräfte jemals Arbeit leisten. Die Relation (95b) und die aus ihr und (95a) sofort sich ergebende Energiegleichung

(96) $$\frac{dW}{dt} = (\mathfrak{v}_0 \mathfrak{K}^a) + (\mathfrak{u} \mathfrak{N}^a),$$

sind für unsere rein elektromagnetisch begründete Dynamik des Elektrons wesentlich.

Kombinieren wir nun die Energiegleichung (96) mit den Impulsgleichungen (94) und (94a), indem wir die aus den

letzteren sich ergebenden Werte der äußeren Kraft und Drehkraft in die erstere einführen, so erhalten wir

$$\frac{dW}{dt} = \left(\mathfrak{v}_0 \frac{d\mathfrak{G}}{dt}\right) + \left(\mathfrak{u} \frac{d\mathfrak{M}}{dt}\right) + (\mathfrak{G}[\mathfrak{u}\mathfrak{v}_0]). \tag{97}$$

Diese aus der Energiegleichung und den Impulsgleichungen abgeleitete Beziehung ist von großer Wichtigkeit für die Dynamik des starren Elektrons; denn sie verknüpft in einer allgemeinen, von den Werten der äußeren Kräfte unabhängigen Weise den Impuls, den Drehimpuls und die Energie des Elektrons.

Wir wollen, ehe wir zur Behandlung spezieller Bewegungen übergehen, noch eine andere, allgemeine Beziehung ableiten, welche sich gleichfalls weiterhin als wertvoll erweisen wird. Dieselbe bezieht sich auf die Differenz der magnetischen Energie T und der elektrischen Energie U des Feldes. Diese Differenz soll die „Lagrangesche Funktion“ genannt werden:

$$L = T - U. \tag{98}$$

Wir wollen bei der Berechnung der beiden Energiearten die Relationen (28) und (29) heranziehen, welche die elektromagnetischen Vektoren durch die elektromagnetischen Potentiale ausdrücken. Dann wird

$$T = \int \frac{dv}{8\pi} \mathfrak{H}^2 = \int \frac{dv}{8\pi} (\mathfrak{H}, \operatorname{curl} \mathfrak{A}), \tag{98a}$$

$$U = \int \frac{dv}{8\pi} \mathfrak{E}^2 = -\int \frac{dv}{8\pi} \left(\mathfrak{E}, \nabla \Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\right). \tag{98b}$$

Die erhaltenen Ausdrücke sollen durch partielle Integration umgeformt werden, wobei die über die Begrenzungsfläche erstreckten Integrale ein für allemal gestrichen werden sollen. Es liegt diesem Verfahren immer die stillschweigende Voraussetzung zugrunde, daß die Grenzfläche nicht von der Störung erreicht worden ist; auf dieser Fläche herrscht dann noch der elektrostatische Anfangszustand, der zu einer früheren Zeit einmal im ganzen Raume geherrscht hat; dieses elektrostatische Feld liefert keine Beiträge zu den Oberflächenintegralen.

Aus Regel (υ) der Formelzusammenstellung in Bd. I, S. 453 folgt

$$T = \int \frac{dv}{8\pi} (\mathfrak{A}, \operatorname{curl} \mathfrak{H}),$$

und, nach Einführung der Feldgleichung (I),

$$T = \frac{1}{2} \int dv (\mathfrak{i} \mathfrak{A}) + \int \frac{dv}{8\pi c} \left(\mathfrak{A}, \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\right). \tag{98c}$$

Andererseits ergibt die Regel (ι) in Bd. I, S. 453

$$\operatorname{div} \Phi \mathfrak{E} = \Phi \operatorname{div} \mathfrak{E} + \mathfrak{E} \nabla \Phi,$$

woraus auf Grund des Gaußschen Satzes (Regel σ) folgt

$$\int dv \mathfrak{E} \nabla \Phi = - \int dv \Phi \operatorname{div} \mathfrak{E} = - 4\pi \int dv \varrho \Phi.$$

Demgemäß wird die elektrische Energie

$$U = \frac{1}{2} \int dv \varrho \Phi - \int \frac{dv}{8\pi c} \left(\mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\right). \tag{98d}$$

Wir wollen, zur Abkürzung, den Skalar

$$\Psi = \Phi - \frac{1}{c} (\mathfrak{v} \mathfrak{A}) \tag{99}$$

einführen und das über das Volumen der Elektronen erstreckte Integral

$$V = \frac{1}{2} \int dv \varrho \Psi \tag{99a}$$

die „Kräftefunktion“ nennen. Nach Gleichung (10) können wir auch schreiben:

$$V = \frac{1}{2} \int dv \varrho \Phi - \frac{1}{2} \int dv (\mathfrak{i} \mathfrak{A}). \tag{99b}$$

Es folgt daher durch Subtraktion von (98c, d)

$$L = - V + \frac{d}{dt} \int \frac{dv}{8\pi c} (\mathfrak{E} \mathfrak{A}). \tag{100}$$

Diese wichtige Beziehung zwischen der Lagrangeschen Funktion und der Kräftefunktion gilt für ein beliebiges elektromagnetisches Feld.

§ 18. Gleichförmige Translation elektrischer Ladungen.

Wir wollen die Entwickelungen dieses Paragraphen etwas allgemeiner halten, als es für die Theorie des translatorisch bewegten Elektrons unbedingt erforderlich wäre. Wir wollen uns ein beliebiges System elektrischer Ladungen in gleichförmiger translatorischer Bewegung begriffen denken. Das System soll bereits seit so langer Zeit in dieser Bewegung begriffen sein, daß in allen betrachteten Aufpunkten die frühere, der gleichförmigen Bewegung vorangegangene Bewegung ohne Einfluß geworden ist; die Bedingungen, unter denen dieses der Fall ist, lassen sich auf Grund der allgemeinen Sätze über die Fortpflanzung der elektromagnetischen Störungen (§ 8) ohne Schwierigkeit angeben. Diese Sätze führen ebenso wie in dem speziellen Falle der Punktladung (§ 12) auch in dem jetzt vorliegenden allgemeinen Falle zur Lösung der gestellten Aufgabe; es wäre nicht schwer, die Bestimmung der elektromagnetischen Potentiale auf Grund der Formeln (50) und (50a) durchzuführen. Man sieht ohne weiteres ein, daß das gleichförmig bewegte System elektrischer Ladungen sein Feld einfach mitführt. In der Tat, denken wir uns ein mit den Ladungen gleichförmig mitbewegtes Bezugssystem und in diesem einen festen Punkt P, so werden die Werte der elektromagnetischen Potentiale Φ und $\mathfrak{A}$ in einem solchen Punkte von der Zeit unabhängig sein; denn welche Zeit t man auch wählt, die Bewegung, nach rückwärts verfolgt, ist stets die gleiche, und die auf den betreffenden, zur Zeit t mit P koinzidierenden Aufpunkt hin sich kontrahierende Kugel führt stets die gleichen Beiträge mit. Es ist demnach das elektromagnetische Feld des gleichförmig bewegten Systemes elektrischer Ladungen stationär, wenn es von einem mitbewegten Bezugssysteme aus beurteilt wird. Freilich gilt das nur für solche Aufpunkte, welche nicht von denjenigen elektromagnetischen Wellen bedeckt werden, die vor Eintritt des stationären Bewegungszustandes entsandt wurden. Je größer die Zeit ist, welche seit dem Beginn der gleichförmigen Be-

wegung verstrichen ist, desto weiter wird die Wellenzone sich von den bewegten Ladungen entfernt haben, wofern nicht deren Geschwindigkeit gerade der Lichtgeschwindigkeit gleich ist. Diesen Fall schließen wir aus; wir betrachten hier ausschließlich Bewegungen mit Unterlichtgeschwindigkeit. Hier wird die mit Lichtgeschwindigkeit forteilende Wellenzone das stationäre Feld einschließen; lassen wir die Zeit, die seit Beginn der gleichförmigen Bewegung verflossen ist, beliebig wachsen, so dehnt sich das stationäre Feld mehr und mehr aus; seine Feldstärken nehmen mit dem Quadrate der Entfernung von den bewegten Ladungen ab. Seine Energie und Bewegungsgröße können daher von einer gewissen Zeit an den (im Falle der Unterlichtgeschwindigkeit endlichen) Werten der Energie und Bewegungsgröße gleichgesetzt werden, welche sich ergeben, wenn man das stationäre Feld als im ganzen Raume herrschend annimmt. Die so berechneten Werte sind allerdings nicht mit der gesamten Energie und Bewegungsgröße des Feldes identisch; um diese zu erhalten, müßten wir noch die Energie und Bewegungsgröße der Wellenzone hinzufügen.

Bei der Berechnung der elektromagnetischen Potentiale des stationären Feldes werden wir nicht die Formeln (50) und (50a) als Ausgangspunkt wählen; es ist hier bequemer, auf die Differentialgleichungen (30a, b) zurückzugehen, die sich hier erheblich vereinfachen. Da nämlich die elektromagnetischen Potentiale stationär sind in bezug auf ein mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegtes System, so ist noch Bd. I, Gl. 116, S. 116:

$$\frac{\partial' \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\Phi = 0,$$

$$\frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{A} = 0.$$

Legen wir die x-Achse der Bewegungsrichtung parallel und setzen

$$\beta = \frac{|\mathfrak{v}|}{c} = \frac{\mathfrak{v}_x}{c},$$

so wird

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -c\beta \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t} = -c\beta \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x},$$

und es nehmen die Differentialgleichungen (30a, b) der elekmagnetischen Potentiale die Form an:

$$(101) \qquad (1-\beta^2)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -4\pi\varrho,$$

$$(101\text{a}) \qquad (1-\beta^2)\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial z^2} = -4\pi\varrho\beta.$$

Die zur Bewegungsrichtung senkrechten Komponenten des elektromagnetischen Vektorpotentiales sind nach (50a) gleich Null, weil

$$\mathfrak{i}_y = \mathfrak{i}_z = 0$$

war; da aber

$$\mathfrak{i}_x = \varrho \frac{\mathfrak{v}_x}{c} = \varrho\beta$$

ist, so wird im Einklang mit (101, 101a):

$$(101\text{b}) \qquad \mathfrak{A}_x = \beta\Phi, \quad \mathfrak{A}_y = \mathfrak{A}_z = 0.$$

Hieraus ergeben sich für die Komponenten der Feldstärken Beziehungen, die den in § 12 (Gl. 67b, e) für eine gleichförmig bewegte Punktladung abgeleiteten vollkommen entsprechen. Es wird

$$(101\text{c}) \qquad \mathfrak{E}_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} = -(1-\beta^2)\frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

$$(101\text{d}) \qquad \mathfrak{E}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \mathfrak{E}_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

$$(101\text{e}) \qquad \mathfrak{H}_x = 0,$$

$$(101\text{f}) \qquad \begin{cases} \mathfrak{H}_y = \dfrac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} = \beta \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = -\beta \mathfrak{E}_z, \\ \mathfrak{H}_z = -\dfrac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} = -\beta \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = +\beta \mathfrak{E}_y. \end{cases}$$

Auch folgt für den Vektor $\mathfrak{F}$, welcher die elektromagnetische Kraft auf die mitbewegte Einheit der Ladung bestimmt, die der Gleichung (68) entsprechende Beziehung

$$(102) \qquad \mathfrak{F} = -\nabla \Psi, \quad \Psi = (1-\beta^2)\Phi.$$

Dabei ist Ψ, das „Konvektionspotential", identisch mit dem allgemein in Gleichung (99) des vorigen Paragraphen definierten Skalar. In dem vorliegenden Falle der gleichförmigen Bewegung hat er der partiellen Differentialgleichung zu genügen:

$$\varkappa^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -4\pi\varrho\varkappa^2, \tag{102a}$$

wobei abkürzungsweise gesetzt ist

$$\varkappa = \sqrt{1-\beta^2}. \tag{102b}$$

Da $\beta < 1$ angenommen wird, so ist $\varkappa$ eine reelle positive Zahlgröße.

Die einfachste, einer gleichförmig bewegten Punktladung entsprechende Lösung der Differentialgleichung (102a) haben wir bereits in § 12 kennen gelernt.

Für die der Bewegungsrichtung parallele Komponente des Vektors

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{4\pi c}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}],$$

welcher nach Gleichung (18) die Dichte der elektromagnetischen Bewegungsgröße bestimmt, erhalten wir aus (101f)

$$\mathfrak{g}_x = \frac{1}{4\pi c}\left\{\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_y\right\} = \frac{1}{4\pi c\beta}\left\{\mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2\right\}.$$

Dabei ist nach (101e) die magnetische Energiedichte gleich

$$\frac{1}{8\pi}\left\{\mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2\right\} = \frac{c\beta}{2}\mathfrak{g}_x = \frac{1}{2}|\mathfrak{v}|\,\mathfrak{g}_x.$$

Integrieren wir über das ganze Feld, so erhalten wir

$$2T = |\mathfrak{v}|\,\mathfrak{G}_x = (\mathfrak{v}\mathfrak{G}). \tag{103}$$

Die doppelte magnetische Energie des gleichförmig bewegten Systemes elektrischer Ladungen ist gleich dem skalaren Produkte aus der Geschwindigkeit und der elektromagnetischen Bewegungsgröße.

Die durch Gleichung (99a) definierte „Kräftefunktion" der bewegten Ladungen

$$V = \frac{1}{2}\int dv\,\varrho\,\Psi \tag{104}$$

ist von großer Wichtigkeit für die Theorie der konvektiv bewegten Elektrizität. Es spielt ja das Konvektionspotential Ψ hier dieselbe Rolle, welche das elektrostatische Potential φ in der Theorie der ruhenden Elektrizität spielt. Wie der negative Gradient von φ die Kraft angibt, die auf die ruhende Einheit der Ladung wirkt, so wird in unserem gleichförmig bewegten Systeme die Kraft auf die mitbewegte Einheit der Ladung durch den negativen Gradienten von Ψ angezeigt (Gl. 102). Wie die Abnahme der elektrostatischen Energie

$$U = \frac{1}{2}\int dv \varrho \varphi \tag{104a}$$

die Arbeit angibt, die bei einer Konfigurationsänderung ruhender Ladungen gewonnen wird, so wird die Abnahme der Kräftefunktion V die Arbeit angeben, die bei einer Änderung der Konfiguration in unserem gleichförmig bewegten Systeme elektrischer Ladungen zu gewinnen ist. Diese Konfigurationsänderung ist selbstverständlich unendlich langsam vorgenommen zu denken, so daß unser System in jedem Momente als ein mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ gleichförmig bewegtes gelten kann. Die für unser stationäres Feld aus (100) und (98) folgende Beziehung

$$V = -L = U - T \tag{104b}$$

gestattet folgende Deutung: Zu der elektrischen Energie U des Ladungssystemes tritt das elektrodynamische Potential $-T$ der Konvektionsströme, welches ebenso wie bei geschlossenen Leitungsströmen (Bd. I, § 70) der negativen magnetischen Energie gleich ist. Die so erhaltene Kräftefunktion gibt die Arbeit an, welche bei einer Konfigurationsänderung der bewegten Ladungen gewonnen wird.

Es folgt übrigens aus (101e, f)

$$T = \int \frac{dv}{8\pi} \mathfrak{H}^2 = \beta^2 \int \frac{dv}{8\pi} \left\{ \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2 \right\}.$$

Hieraus ergibt sich für die Kräftefunktion der Ausdruck

$$V = -L = \int \frac{dv}{8\pi} \left\{ \mathfrak{E}_x^2 + \varkappa^2 (\mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2) \right\}. \tag{104c}$$

Für die wirkliche Berechnung eignet sich allerdings besser die Formel (104), welche die Kräftefunktion durch ein über die elektrischen Ladungen erstrecktes Integral darstellt; dieses Integral läßt sich auswerten, sobald das Konvektionspotential Ψ bekannt ist. Wir gehen jetzt dazu über, durch Integration der partiellen Differentialgleichung (102a) das Konvektionspotential zu bestimmen.

Man sieht sofort ein, daß diese Differentialgleichung in die Poissonsche Gleichung übergeht, wenn man durch die Substitution

(105) $$x = x_0 \varkappa, \quad y = y_0, \quad z = z_0$$

neue unabhängige Variable einführt. Wir wollen gleichzeitig setzen

(105a) $$\varrho = \frac{\varrho_0}{\varkappa}.$$

Dann ist die Differentialgleichung des Konvektionspotentiales zu schreiben

(105b) $$\nabla_0^2 \Psi = -4\pi\varrho_0\varkappa.$$

Wir wollen unser gleichförmig bewegtes System Σ vergleichen mit einem ruhenden Systeme Σ_0 von elektrischen Ladungen. Es sollen x_0, y_0, z_0, ϱ_0 Raumkoordinaten und elektrische Dichte in Σ_0 sein, d. h. es soll Σ_0 aus Σ durch eine Dilatation parallel der Bewegungsrichtung hervorgehen, durch welche alle der x-Achse parallelen Strecken im Verhältnis

$$\varkappa^{-1} = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

verlängert werden; die Dichte der Elektrizität soll gemäß (105a) im Verhältnis $\varkappa$ bei dieser Dehnung verkleinert werden, so daß entsprechende Volumelemente in Σ und Σ_0 dieselbe Ladung enthalten. Das elektrostatische Potential φ_0 in Σ_0 wird der Poissonschen Gleichung zu genügen haben

(105c) $$\nabla_0^2\varphi_0 = -4\pi\varrho_0,$$

welche durch

(105d) $$\varphi_0 = \int \frac{dv_0\,\varrho_0}{r_0} = \int \frac{de_0}{r_0}$$

allgemein integriert wird. Vergleichen wir nun (105b) und (105c) und bemerken, daß die Ladungen entsprechender Volumelemente in Σ_0 und Σ die gleichen sind, so erhalten wir

(106) $$\Psi = \varkappa \varphi_0 - \varkappa \int \frac{de}{r_0} = \varkappa \int \frac{dv \varrho}{r_0},$$

wo

(106a) $$r_0 = \sqrt{(x_0 - \xi_0)^2 + (y_0 - \eta_0)^2 + (z_0 - \zeta_0)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{(x-\xi)^2}{\varkappa^2} + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

die Entfernung der Punkte $(x_0 y_0 z_0)$ und $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ ist, welche in dem ruhenden Systeme Σ_0 dem Aufpunkte (xyz) und dem Quellpunkte $(\xi \eta \zeta)$ des bewegten Systemes Σ entsprechen. Hierdurch ist allgemein die Bestimmung des Konvektionspotentiales in Σ zurückgeführt auf die Bestimmung des elektrostatischen Potentiales in Σ_0.

Das Konvektionspotential einer im Koordinatenanfange befindlichen Punktladung e wird hiernach

(106b) $$\Psi = \frac{\varkappa^2 e}{\sqrt{x^2 + \varkappa^2 (y^2 + z^2)}},$$

was vollkommen mit den Gleichungen (68) und (67a) des § 12 übereinstimmt. In Entfernungen von dem bewegten Ladungssysteme, in welchen dasselbe wie eine Punktladung wirkt, ist die Formel (106b) für das Konvektionspotential zu verwenden; hier sind die Flächen konstanten Konvektionspotentiales in Σ Heaviside-Ellipsoide, welche aus den kugelförmigen Äquipotentialflächen einer ruhenden Punktladung in Σ_0 durch die Transformation (105) entstehen.

Vergleichen wir die Komponenten der elektrostatischen Kraft

$$\mathfrak{E}_0 = -\nabla_0 \varphi_0 \text{ in } \Sigma_0$$

mit denen der elektromagnetischen Kraft

$$\mathfrak{F} = -\nabla \Psi \text{ in } \Sigma,$$

so erhalten wir gemäß (105) und (106)

$$\text{(106c)} \quad \begin{cases} \mathfrak{F}_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0} = \mathfrak{E}_{0x}, \\ \mathfrak{F}_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\varkappa \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0} = \varkappa \mathfrak{E}_{0y}, \\ \mathfrak{F}_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\varkappa \frac{\partial \varphi_0}{\partial z_0} = \varkappa \mathfrak{E}_{0z}. \end{cases}$$

Es wirken demnach auf zwei einander entsprechenden Ladungen des bewegten Systemes Σ und des ruhenden Systemes Σ_0 Kräfte, die bezüglich der Komponenten parallel der Bewegungsrichtung einander gleich sind, während die zur Bewegungsrichtung senkrechten Komponenten in Σ im Verhältnis $\varkappa = \sqrt{1-\beta^2}$ kleiner sind als in Σ_0.

Hat man für ein ruhendes System Σ_0 das elektrostatische Problem gelöst, d. h. die Gleichgewichtsverteilung der Elektrizität auf einem Leitersystem ermittelt, so kann sofort aus dieser Lösung die Gleichgewichtsverteilung der Elektrizität in dem gleichförmig bewegten Systeme Σ angegeben werden, welches aus Σ_0 durch eine Kontraktion parallel der Bewegungsrichtung im Verhältnis $\varkappa$ entsteht. Im Innern der Leiter in Σ_0 ist das elektrostatische Potential konstant, die Feldstärke $\mathfrak{E}_0$ gleich Null; dementsprechend ist in Σ auf den Leitern das Konvektionspotential konstant und die elektromagnetische Kraft $\mathfrak{F}$ gleich Null. Wie die Gleichgewichtsverteilung in Σ_0, dem Satze von W. Thomson gemäß (vgl. I, §50), durch ein Minimum der elektrostatischen Energie U_0 ausgezeichnet ist, so besitzt die Verteilung der Elektrizität auf den Leitern des bewegten Systemes Σ die Eigenschaft, die Kräftefunktion

$$\text{(106d)} \quad V = \frac{1}{2}\int dv\,\varrho\,\Psi = \frac{1}{2}\int dv_0\,\varrho_0\,\varkappa\,\varphi_0 = \varkappa\,U_0$$

zu einem Minimum zu machen.

Wir denken uns in Σ_0 die Ladung e mit gleichförmiger räumlicher Dichte verteilt über eine von zwei konzentrischen,

ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoiden begrenzte Schicht. Das elektrostatische Potential nimmt in dem Grenzfalle einer sehr dünnen Schicht im Innern des Ellipsoides den konstanten Wert an*):

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} e \int_0^\infty \frac{ds}{D}, \tag{107}$$

wo abkürzungsweise

$$D = \sqrt{(a_0^2 + s)(b_0^2 + s)(c_0^2 + s)} \tag{107a}$$

gesetzt ist. Die entsprechende, im Grenzfalle flächenhafte Verteilung der Elektrizität ist, eben weil sie im Innern des Ellipsoides ein konstantes elektrostatisches Potential ergibt, diejenige, welche sich auf einem leitenden ruhenden Ellipsoide von den Halbachsen a_0, b_0, c_0 wirklich herstellt.

Durch gleichförmige Kontraktion im Verhältnis $\varkappa$ parallel irgendeiner Geraden entsteht nun aus diesem Ellipsoide wiederum ein Ellipsoid von den Halbachsen a, b, c. Wird dieses parallel jener Geraden gleichförmig bewegt mit einer dem Werte von $\varkappa$ entsprechenden Geschwindigkeit, so ordnet es sich eben dem ruhenden Ellipsoide $\Sigma_0(a_0, b_0, c_0)$ als bewegtes $\Sigma(a, b, c)$ zu; auf ihm ist das Konvektionspotential $\Psi = \varkappa\varphi_0$ konstant. Da nun die Gleichgewichtsverteilung der Elektrizität auf einem bewegten Leiter dadurch gekennzeichnet ist, daß im Innern des Leiters der Vektor $\mathfrak{F}$ verschwindet, d. h. das Konvektionspotential konstant ist, so erhalten wir durch Kontraktion des ruhenden leitenden Ellipsoides Σ_0 ein bewegtes leitendes Ellipsoid Σ, auf dem das konvektive Gleichgewicht der Elektrizität sich hergestellt hat. Beachten wir nun, daß die Elektrizitätsverteilung in Σ_0 sich als Grenzfall einer räumlichen gleichförmigen Verteilung zwischen zwei konzentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoiden auffassen läßt, und daß durch die vorgenommene Kontraktion diese Ellipsoide wieder in ähnliche, konzentrische und ähnlich liegende Ellipsoide

*) Vgl. Riemann-Weber, die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik. I, § 108, S. 259.

übergehen, so erkennen wir folgendes: Die erhaltene Elektrizitätsverteilung auf dem Ellipsoide $\Sigma(a, b, c)$ wäre auch dann im Gleichgewichte, wenn das Ellipsoid ruhte. Die Elektrizitätsverteilung auf einem leitenden Ellipsoide wird durch gleichförmige Bewegung desselben nicht beeinflußt[39]).

Auf unserem kugelförmigen Elektron wurde die Flächenladung als gleichförmige angesehen, und es wurde angenommen, daß die Ladung fest an der Fläche haftet. Obgleich dieser Fall physikalisch wesentlich verschieden ist von demjenigen des geladenen Konduktors, so zeigt doch der obige Satz, daß beide Fälle in ihren Konsequenzen übereinstimmen, wenigstens für stationäre und quasistationäre Bewegungen; denn es bleibt ja auch auf dem bewegten leitenden Ellipsoide die Elektrizitätsverteilung, obwohl sie einer Änderung fähig wäre, im Falle des konvektiven Gleichgewichtes die gleiche wie auf dem ruhenden. So erklärt es sich, daß die Untersuchungen von W. B. Morton[39]) und G. F. C. Searle[52]) über das Feld und die Feldenergie gleichförmig bewegter ellipsoidischer Leiter für die Dynamik des Elektrons sich haben verwerten lassen, obwohl sie von wesentlich anderen Grundhypothesen ausgehen.

Durch (107) und (106) ist das Konvektionspotential einer bewegten ellipsoidischen Flächenladung bestimmt. Wie die Bewegungsrichtung auch gegen die Hauptachsen $(2a, 2b, 2c)$ orientiert sein mag, die Streckung (105) ergibt stets wiederum ein Ellipsoid, durch dessen Hauptachsen $(2a_0, 2b_0, 2c_0)$ sich das elektrostatische Potential φ_0 gemäß (107) berechnet. Die elektrostatische Energie dieses flächenhaft geladenen Ellipsoides ist

$$(107\text{b}) \qquad U_0 = \frac{1}{2}\varphi_0 e = \frac{e^2}{4}\int_0^\infty \frac{ds}{D};$$

aus ihr bestimmt sich nach (106d) die Kräftefunktion des bewegten Ellipsoides.

Wir wollen dem Falle der Flächenladung den Fall gleichförmiger Volumladung eines bewegten Ellipsoides gegenüber-

stellen. Sind die Halbachsen a, b, c dieses Ellipsoides dieselben wie die des soeben betrachteten, und ist die Orientierung der Achsen gegen die Bewegungsrichtung dieselbe, so sind auch die Halbachsen a_0, b_0, c_0 des beim Übergang zum gestreckten Systeme Σ_0 entstehenden Ellipsoides die gleichen wie dort. Es wird hier das elektrostatische Potential in Σ_0 für das Innere des Ellipsoides*)

$$(107\text{c}) \qquad \varphi_0 = \frac{3}{4} e \int_0^\infty \frac{ds}{D}\left(1 - \frac{x_0^2}{a_0^2+s} - \frac{y_0^2}{b_0^2+s} - \frac{z_0^2}{c_0^2+s}\right),$$

und somit die elektrostatische Energie der Volumladung

$$U_0^* = \frac{1}{2}\int dv_0 \varrho_0 \varphi_0$$

$$= \frac{3}{8} e \int_0^\infty \frac{ds}{D}\int dv_0 \varrho_0 \left(1 - \frac{x_0^2}{a_0^2+s} - \frac{y_0^2}{b_0^2+s} - \frac{z_0^2}{c_0^2+s}\right).$$

Die Integrationen über das Volumen des Ellipsoides lassen sich leicht ausführen. Man findet

$$(107\text{d}) \qquad U_0^* = \frac{3}{8} e^2 \int_0^\infty \frac{ds}{D}\left\{1 - \frac{1}{5}\left(\frac{a_0^2}{a_0^2+s} + \frac{b_0^2}{b_0^2+s} + \frac{c_0^2}{c_0^2+s}\right)\right\}.$$

Wir wollen die elektrostatische Energie (107d) des gleichförmig über sein Volumen geladenen Ellipsoides vergleichen mit derjenigen des flächenhaft geladenen (107b). Wir können die letztere auffassen als Funktion der Größen a_0^2, b_0^2, c_0^2, und zwar als homogene Funktion vom Grade $\left(-\frac{1}{2}\right)$. In der Tat, erinnern wir uns der Bedeutung der Größe D, die in (107a) angegeben war, und setzen statt a_0^2, b_0^2, c_0^2 die α-fachen Werte, so geht durch die Substitution $s = s'\alpha$ die rechte Seite von (107b) über in ein ganz gleiches, nach s' genommenes Integral

*) Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen d. math. Physik. I, § 107, S. 256.

zwischen denselben Grenzen, multipliziert mit $\alpha^{-\frac{1}{2}}$. Nach einem Satze von Euler über homogene Funktionen ist demnach

$$a_0^2 \frac{\partial U_0}{\partial a_0^2} + b_0^2 \frac{\partial U_0}{\partial b_0^2} + c_0^2 \frac{\partial U_0}{\partial c_0^2} = -\frac{1}{2} U_0. \tag{107e}$$

Was nun die elektrostatische Energie der Volumladung (107d) betrifft, so können wir schreiben

$$U_0^* = \frac{3}{2}\left\{ U_0 + \frac{2}{5}\left(a_0^2 \frac{\partial U_0}{\partial a_0^2} + b_0^2 \frac{\partial U_0}{\partial b_0^2} + c_0^2 \frac{\partial U_0}{\partial c_0^2}\right)\right\},$$

was nach (107e) ergibt

$$U_0^* = \frac{6}{5} U_0. \tag{107f}$$

Von der elektrostatischen Energie in Σ_0 auf Grund von (106d) sogleich zur Kräftefunktion in Σ übergehend, erhalten wir

$$V^* = \frac{6}{5} V. \tag{108}$$

Es verhalten sich die Kräftefunktionen zweier Ellipsoide derselben Form, Ladung, Bewegungsrichtung und Geschwindigkeit, von denen das erste über sein Volumen gleichförmig geladen ist, während im zweiten die Ladungsverteilung der Flächenladung des leitenden Ellipsoides entspricht (d. h. als Grenzfall einer gleichförmigen räumlichen Verteilung in einer, von zwei ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoiden begrenzten Schicht anzusehen ist) wie 6:5. Dieser Satz führt den Fall der Volumladung auf denjenigen der Flächenladung zurück, so daß wir uns weiterhin nur mit dem letzteren zu beschäftigen brauchen.

§ 19. Bewegungsgröße und Energie des gleichförmig bewegten Elektrons.

Wir betrachten ein ellipsoidisches Elektron in gleichförmiger geradliniger Bewegung; ist genügend lange Zeit seit dem Eintritt dieser Bewegung verflossen, und ist die Geschwindigkeit der Translation kleiner als die Lichtgeschwindigkeit, so wird die gesamte Energie und Bewegungsgröße des

Feldes konstant sein. Sie wird sich zusammensetzen aus der Energie und Bewegungsgröße, der vor Eintritt der gleichförmigen Bewegung entsandten Wellen und der vom Elektron mitgeführten Energie und Bewegungsgröße. Die weitere Bewegung des Elektrons ist ausschließlich durch die mitgeführte Bewegungsgröße und Energie bestimmt.

Da der gesamte elektromagnetische Impuls und der auf den Mittelpunkt des Elektrons bezogene Drehimpuls des mitgeführten Feldes konstant sind, so ergeben die Impulssätze (94, 94a):

$$\mathfrak{K}^a = 0, \tag{109}$$

$$\mathfrak{N}^a = [\mathfrak{v}_0 \mathfrak{G}]. \tag{109a}$$

Es bedarf demnach keiner äußeren Kraft, um die gleichförmige Bewegung des ellipsoidischen Elektrons aufrechtzuerhalten, wohl aber im allgemeinen einer äußeren Drehkraft. Eine äußere Drehkraft ist stets erforderlich, wenn der Impulsvektor $\mathfrak{G}$ nicht der Bewegungsrichtung parallel weist. Man überzeugt sich leicht davon, daß dieses eine Konsequenz der allgemeinen Impulsätze des § 5 ist. Es war ja die elektromagnetische Bewegungsgröße über den Äther verteilt zu denken und dementsprechend das Impulsmoment auf einen im Raume festen Punkt zu beziehen. Eine äußere Drehkraft ist dann erforderlich, wenn das auf den ruhenden Momentenpunkt bezogene Moment der elektromagnetischen Bewegungsgröße sich ändert; das ist aber hier der Fall; denn es führt das gleichförmig bewegte Elektron sein Feld und die über dieses Feld verteilte Bewegungsgröße einfach mit sich, es ändert sich also der von dem ruhenden Bezugspunkte aus gezogene Hebelarm, an dem das betreffende Quantum von Bewegungsgröße anzubringen ist, und zwar für das ganze Feld mit derselben Geschwindigkeit $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0$. Die zeitliche Änderung des gesamten auf den ruhenden Momentenpunkt bezogenen Impulsmomentes ist demnach gleich dem äußeren Produkte aus $\mathfrak{v}_0$ und dem gesamten Impulse des mitgeführten Feldes, wie Gleichung (109a) behauptet. Was

aber die Bewegungsgröße der entsandten Wellen anbelangt, so ist diese, wie wir gezeigt haben, der Strahlrichtung, d. h. dem vom Orte des Entsendens aus gezogenen Radiusvektor parallel. Ihr Moment in bezug auf diesen im Raume festen Punkt ist dauernd gleich Null, so daß die Bewegungsgröße der Wellen in (109a) nicht eingeht.

Es ist aus Symmetriegründen ersichtlich und wird durch genauere Überlegung bestätigt, daß der Impuls $\mathfrak{G}$ des mitgeführten Feldes parallel der Bewegungsrichtung weist, wenn ein ellipsoidisches Elektron einer der drei Hauptachsen parallel bewegt wird. Geschieht hingegen die Bewegung des Ellipsoides in einer anderen Richtung, so bedarf es einer äußeren Drehkraft, um die gleichförmige, rotationslose Bewegung aufrechtzuerhalten. Eine Translation des ellipsoidischen Elektrons in einer zu den Hauptachsen schiefen Richtung erfüllt also nicht das erste Axiom der Newtonschen Mechanik; sie kann nicht ohne Einwirkung äußerer Kräfte vor sich gehen. Was aber die Bewegung parallel den Hauptachsen anbelangt, so sind stabile und labile Bewegungen zu unterscheiden. Eine translatorische Bewegung wird als stabil zu bezeichnen sein, wenn beim Herausdrehen der Hauptachse aus der Bewegungsrichtung eine innere Drehkraft erweckt wird, welche die Hauptachse wieder in die Bewegungsrichtung einzustellen strebt, d. h. wenn die durch (109a) angegebene äußere Drehkraft $\mathfrak{N}^a$, welche jener inneren Drehkraft das Gleichgewicht hält, das Ellipsoid aus der Bewegungsrichtung herauszudrehen sucht. Ist hingegen eine äußere Drehkraft erforderlich, welche die betreffende Hauptachse in die Bewegungsrichtung einzustellen sucht, d. h. streben die durch eine kleine Drehung erweckten inneren Drehkräfte den Winkel zwischen der Achse und der Bewegungsrichtung zu vergrößern, so wird die betreffende Bewegung eine labile zu nennen sein. Wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, gibt die Kräftefunktion V des Elektrons durch ihre Abnahme die bei konstant gehaltener Geschwindigkeit bei einer Konfigurationsänderung zu gewinnende Arbeit an. Dem-

entsprechend werden sich die stabilen und labilen Translationsbewegungen dadurch unterscheiden lassen, daß erstere einem Minimum, letztere einem Maximum der Kräftefunktion V bei gegebener Geschwindigkeit entsprechen, gerade so, wie in der Mechanik die stabilen und labilen Gleichgewichte durch ein Minimum bzw. ein Maximum der potentiellen Energie sich auszeichnen (vgl. Bd. I, § 11). Die genauere Untersuchung[1]) hat dieses bestätigt; sie hat ferner ergeben, daß die Bewegung des Ellipsoides parallel der größten der drei Achsen einem Minimum der Kräftefunktion V (oder nach (104b) einem Maximum der Lagrangeschen Funktion) entspricht und demnach stabil ist. Die Bewegung parallel der kleinsten der drei Achsen hingegen, welche einem Maximum von V entspricht, ist instabil. Wir können also nicht annehmen, daß die in den Kathodenstrahlen und in den Radiumstrahlen bewegten Elektronen etwa abgeplattete Rotationsellipsoide sind, welche sich parallel der Rotationsachse bewegen, wenigstens dann nicht, wenn wir die Ladung starr an dem Volumen oder an der Oberfläche des Ellipsoides haften lassen; der kleinste Anstoß würde genügen, um ein solches Ellipsoid zum Umschlagen zu bringen. Was schließlich die Bewegung parallel der mittleren Achse des dreiachsigen Ellipsoides anbelangt, so ist dieselbe offenbar stabil gegenüber solchen Drehungen, welche die kleinste Hauptachse, aber labil gegenüber solchen, welche die größte Hauptachse der Bewegungsrichtung parallel zu stellen suchen. Auch eine Bewegung parallel dieser mittleren Achse wird labil zu nennen sein. Wenn man unsere einfachste Voraussetzung, nämlich die eines kugelförmigen Elektrons, aufzugeben und zu der komplizierteren Annahme einer ellipsoidischen Form überzugehen wünscht, so wird man in den Kathodenstrahlen und in den Radiumstrahlen diese ellipsoidischen Elektronen nur ihrer größten Achse parallel bewegt annehmen dürfen, wofern man an den Grundhypothesen (VI, VIa und VII) festhält.

Unser kugelförmiges Elektron ist offenbar bezüglich einer Drehung in indifferentem Gleichgewicht. Der Impuls weist

stets parallel der Bewegungsrichtung, und es ist keine äußere Drehkraft erforderlich, um die gleichförmige Translation aufrechtzuerhalten. Die gleichförmige Translationsbewegung unseres kugelförmigen Elektrons mit Unterlichtgeschwindigkeit ist demnach eine kräftefreie Bewegung. Es gilt für ein solches Elektron, sei es, daß die Ladung gleichförmig über die Oberfläche oder gleichförmig über das Volumen verteilt ist, das erste Axiom der Newtonschen Mechanik.

Wir gehen nunmehr zur Berechnung der elektromagnetischen Bewegungsgröße und Energie über, welche das Elektron bei seiner gleichförmigen Translation mit sich führt. Die Bestimmung der Kräftefunktion V bzw. der Lagrangeschen Funktion L ist ja durch (106d) zurückgeführt auf die Bestimmung der elektrostatischen Energie U_0 des im Verhältnis $\varkappa^{-1}$ seiner Bewegungsrichtung parallel gestreckten Elektrons:

$$V = -L = \varkappa U_0. \tag{110}$$

Aus der Lagrangeschen Funktion leiten wir nun sowohl die Bewegungsgröße wie die Energie unseres kugelförmigen Elektrons ab. Wir gehen dabei aus von der Formel (104c):

$$L = -\int \frac{dv}{8\pi} \left\{ \mathfrak{E}_x^2 + (1-\beta^2)(\mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2) \right\}. \tag{110a}$$

Dieselbe nach β differentiierend, erhalten wir

$$\frac{dL}{d\beta} = \beta \int \frac{dv}{4\pi} \left\{ \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2 \right\} - \int \frac{dv}{4\pi} \left\{ \mathfrak{E}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial \beta} + \varkappa^2 \left(\mathfrak{E}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial \beta} + \mathfrak{E}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \beta} \right) \right\}. \tag{110b}$$

Wir betrachten zuerst das zweite der hier auftretenden Integrale; die partielle Differentiation nach β bezieht sich auf das Feld, welches in einem gegebenen Punkte des stationären vom Elektron mitgeführten Feldes herrscht, d. h. es sind die Koordinaten (x, y, z) im bewegten Systeme bei der Differentiation nach β konstant zu halten. Nach (101c, d) und (102) können wir das Integral schreiben

$$\int \frac{dv}{4\pi} \left(\mathfrak{F} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \beta} \right) = -\int \frac{dv}{4\pi} \left(\nabla \Psi, \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \beta} \right).$$

Nach der Regel (ι) der Formelzusammenstellung in Bd. I, S. 453 ist

$$-\left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \beta}, \nabla \Psi\right) = \Psi \operatorname{div} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \beta} - \operatorname{div} \Psi \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \beta}.$$

Der Satz von Gauß ergibt demgemäß

$$\int \frac{dv}{4\pi}\left(\mathfrak{F} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \beta}\right) = \int \frac{dv}{4\pi} \Psi \frac{\partial \operatorname{div} \mathfrak{E}}{\partial \beta} = \int dv\, \Psi \frac{\partial \varrho}{\partial \beta},$$

wenn man beachtet, daß das Oberflächenintegral von $\Psi \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \beta}$ über die Begrenzungsfläche des stationären Feldes zu vernachlässigen ist, da Ψ mit der $(-1)^{\text{ten}}$, $\mathfrak{E}$ mit der $(-2)^{\text{ten}}$ Potenz der Entfernung vom Elektron abnehmen; hat, wie wir voraussetzen, das stationäre Feld sich bis zu Entfernungen ausgedehnt, die groß sind gegen den Radius des Elektrons, so ist dieses Oberflächenintegral in der Tat zu streichen; das geschieht mit demselben Rechte, mit dem wir die Energie und die Bewegungsgröße des mitgeführten Feldes so berechnen, als ob im ganzen Raume das stationäre Feld herrschte.

Die partielle Differentiation nach β bezieht sich auf einen Punkt, der eine feste Lage in einem mit dem Elektron bewegten Bezugssysteme hat. Haftet nun, wie angenommen wurde, die Elektrizität starr an den Volumelementen des Elektrons, so ist die Ladungsverteilung von der Geschwindigkeit unabhängig, und es wird

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \beta} = 0,$$

und daher auch

$$\int \frac{dv}{4\pi}\left(\mathfrak{F} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \beta}\right) = \int dv\, \Psi \frac{\partial \varrho}{\partial \beta} = 0. \tag{110c}$$

Wir erhalten demnach aus (110b) mit Rücksicht auf (101f)

$$\frac{1}{c}\frac{dL}{d\beta} = \int \frac{dv}{4\pi c}\left\{\mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y\right\} = \int dv\, \mathfrak{g}_x = \mathfrak{G}_x. \tag{110d}$$

Es wird die der Bewegungsrichtung parallele Impulskomponente erhalten, indem man die Lagrangesche Funktion nach dem Betrage $|\mathfrak{v}| = c\beta$ der Geschwindigkeit differentiiert. Speziell für unser kugel-

förmiges Elektron, dessen Impuls stets seiner Bewegungsrichtung parallel ist, wird

$$|\mathfrak{G}| = \frac{dL}{d|\mathfrak{v}|}. \tag{111}$$

Die Gültigkeit dieser bedeutungsvollen Beziehung fußt wesentlich auf der kinematischen Grundhypothese (VII), welche aussagt, daß die Elektrizität an den Volumelementen des starren Elektrons haftet. Würden wir hingegen eine Formänderung des Elektrons zulassen und annehmen, daß mit wachsender Geschwindigkeit die Form des Elektrons, d. h. die Ladungsverteilung im bewegten Systeme sich änderte, so wäre ϱ als Funktion von β anzusehen; alsdann würde die Relation (110c) nicht mehr gelten, es würde das zweite Glied auf der rechten Seite von (110b) nicht mehr fortfallen. Es beruht mithin die Gleichung (110d) auf unserer kinematischen Grundhypothese (VII); diese Gleichung geht in (111) über, wenn der Impuls der Bewegungsrichtung parallel weist, d. h. wenn keine äußere Drehkraft zur Aufrechterhaltung der gleichförmigen Translation erforderlich ist. Für unser kugelförmiges Elektron ist diese Bedingung, wie wir gesehen haben, erfüllt.

Die Lagrangesche Funktion ist definiert als Differenz der magnetischen Energie T und der elektrischen Energie U. Es ist mithin die gesamte elektromagnetische Energie des Elektrons

$$W = 2T - L.$$

Führen wir hier für $2T$ den allgemeinen, im vorigen Paragraphen erhaltenen Ausdruck (103) ein, so erhalten wir

$$W = |\mathfrak{v}|\,\mathfrak{G}_x - L$$

oder mit Rücksicht auf (110d)

$$W = |\mathfrak{v}|\frac{dL}{d|\mathfrak{v}|} - L. \tag{111a}$$

Es drückt sich demnach auch die Energie eines der kinematischen Grundgleichung (VII) gehorchenden Elektrons allgemein durch die Lagrangesche Funk-

tion aus. Wir merken noch die aus (111) und (111a) folgende Beziehung an

$$\frac{d\,|\mathfrak{G}|}{d\,|\mathfrak{v}|} = \frac{1}{|\mathfrak{v}|}\frac{d\,W}{d\,|\mathfrak{v}|} = \frac{d^2 L}{d\,|\mathfrak{v}|^2}, \tag{111b}$$

deren Bedeutung wir im nächsten Paragraphen erläutert werden.

Die Entwickelungen des vorigen Paragraphen gestatten es nun ohne weiteres, das Feld und die Lagrangesche Funktion eines kugelförmigen Elektrons zu ermitteln, sowohl für den Fall der gleichförmigen Flächenladung als auch für den Fall der gleichförmigen Volumladung.

Durch die Transformation (105) wird die bewegte Kugel vom Radius a abgebildet auf ein ruhendes Ellipsoid von den Halbachsen

$$a_0 = \frac{a}{\varkappa}, \quad b_0 = c_0 = a; \tag{112}$$

dies ist ein gestrecktes Rotationsellipsoid, dessen Rotationsachse der Bewegungsrichtung des Elektrons entspricht. Das elektrostatische Potential dieses Ellipsoides würde sich für den Fall der Flächenladung aus (107), für den Fall der Volumladung aus (107c) durch Einführung der Halbachsen (112) auswerten lassen. Durch (106) wäre dann das Konvektionspotential des bewegten Elektrons bestimmt als

$$\Psi = \varkappa \varphi_0, \tag{112a}$$

und durch (102) bzw. (101b) die elektromagnetischen Potentiale

$$\Phi = \varkappa^{-2}\Psi = \varkappa^{-1}\varphi_0 \tag{112b}$$

und

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{v}}{c}\Phi = \frac{\mathfrak{v}}{c\varkappa}\varphi_0. \tag{112c}$$

Anstatt φ_0 aus (107) bzw. (107c) zu berechnen, ziehen wir es vor, zunächst den Fall der Flächenladung zu erledigen, indem wir uns auf die im ersten Bande dieses Werkes (§ 40) gegebene Ableitung des elektrostatischen Potentiales eines gestreckten Rotationsellipsoides beziehen. Die Verteilung der Ladung auf dem leitenden Ellipsoide ist ja als Grenzfall einer

gleichförmigen räumlichen Verteilung zwischen zwei ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoiden anzusehen, wie wir im vorigen Paragraphen bemerkten. Diese Verteilung ist gerade die hier in Betracht kommende, nämlich diejenige, die durch Streckung des mit einer gleichförmigen Flächenbelegung versehenen Elektrons entsteht. Das elektrostatische Potential des leitenden Ellipsoides ist in Bd. I, Gl. (132), S. 139 angegeben; dort war die Rotationsachse der z-Achse parallel; es bezeichnete c den halben Abstand der Brennpunkte, der hier gleich

$$\sqrt{a_0^2 - b_0^2} = a\sqrt{\frac{1-\varkappa^2}{\varkappa^2}} = a\frac{\beta}{\varkappa}$$

zu setzen ist; es stellten ferner r_1 und r_2 die Abstände eines Aufpunktes von den Brennpunkten dar, die in der jetzigen Schreibweise sind

$$r_1 = \sqrt{\left(x_0 + a\frac{\beta}{\varkappa}\right)^2 + y_0^2 + z_0^2},$$

$$r_2 = \sqrt{\left(x_0 - a\frac{\beta}{\varkappa}\right)^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

Demgemäß wird

$$\text{(112d)} \qquad \varphi_0 = \frac{e\varkappa}{2\beta a} \ln \left\{ \frac{x_0 + a\frac{\beta}{\varkappa} + r_1}{x_0 - a\frac{\beta}{\varkappa} + r_2} \right\}$$

im äußeren Felde das elektrostatische Potential des gestreckten Rotationsellipsoides. Zum bewegten Elektron zurückkehrend, erhalten wir aus (112b, c) die elektromagnetischen Potentiale des mitgeführten äußeren Feldes

$$\text{(112e)} \qquad \Phi = \frac{e}{2\beta a} \ln \left\{ \frac{x + a\beta + \varkappa r_1}{x - a\beta + \varkappa r_2} \right\},$$

$$\text{(112f)} \qquad \mathfrak{A} = \frac{e\mathfrak{v}}{2\beta a c} \ln \left\{ \frac{x + a\beta + \varkappa r_1}{x - a\beta + \varkappa r_2} \right\},$$

wobei nach (105)

$$\text{(112g)} \qquad \begin{cases} \varkappa r_1 = \sqrt{(x + a\beta)^2 + \varkappa^2 (y^2 + z^2)} \\ \varkappa r_2 = \sqrt{(x - a\beta)^2 + \varkappa^2 (y^2 + z^2)} \end{cases}$$

zu setzen ist. Aus diesen Werten der elektromagnetischen Potentiale ist das äußere Feld des Elektrons nach den Formeln

(101c, d, e, f) abzuleiten. Das **Konvektionspotential**, dessen negativer Gradient die auf die Einheit der mitbewegten Ladung ausgeübte Kraft bestimmt, ist **außerhalb des Elektrons**, nach (112a, d)

$$\Psi = \frac{e\varkappa^2}{2\beta a} \ln \left\{ \frac{x + a\beta + \varkappa r_1}{x - a\beta + \varkappa r_2} \right\}. \tag{112h}$$

Die Äquipotentialflächen des ruhenden, gestreckten Rotationsellipsoides sind konfokale Ellipsoide, die sich mit wachsender Entfernung mehr und mehr der Kugelgestalt nähern. Im äußeren Felde des bewegten Elektrons sind die Flächen konstanten Konvektionspotentiales eine Schar von Ellipsoiden, welche aus jenen durch eine Kontraktion parallel der x-Achse entstehen; mit wachsender Entfernung vom Elektron nähern sie sich asymptotisch Heaviside-Ellipsoiden.

Wie die Oberfläche des leitenden Rotationsellipsoides eine Äquipotentialfläche ist, so ist die Oberfläche des Elektrons eine Fläche konstanten Konvektionspotentiales. Nach Bd. I, Gl. 132b, S. 141 ist das elektrostatische Potential des leitenden Ellipsoides

$$\varphi_0 = \frac{e}{\sqrt{a_0^2 - b_0^2}} \ln \left(\frac{a_0 + \sqrt{a_0 + b_0^2}}{b_0} \right). \tag{112i}$$

Nach (112, 112a) wird demnach der an der **Oberfläche des Elektrons herrschende Wert des Konvektionspotentiales**

$$\Psi = \frac{e\varkappa^2}{a\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{\varkappa} \right) = \frac{e}{a} \frac{1-\beta^2}{2\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right). \tag{112k}$$

Im Innern des flächenhaft geladenen Elektrons sind sowohl das Konvektionspotential wie die elektromagnetischen Potentiale konstant; demgemäß besteht im Innern des gleichförmig bewegten Elektrons, in dem hier behandelten Falle der Flächenladung, überhaupt kein elektromagnetisches Feld.

Aus (104) bzw. (104b) folgt jetzt ohne weiteres der Wert der **Kräftefunktion** bzw. der **Lagrangeschen Funktion des Elektrons**

$$V = -L = \frac{1}{2} e \Psi = \frac{e^2}{2a} \frac{1-\beta^2}{2\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \tag{113}$$

für den **Fall der Flächenladung.**

Aus (111) folgt als Betrag des Impulses

$$(113\text{a})\qquad |\mathfrak{G}| = \frac{dL}{d|\mathfrak{v}|} = \frac{e^2}{2ac\beta}\left\{\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta}\right)\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1\right\},$$

und aus (111a) die Energie des Elektrons

$$(113\text{b})\qquad W = |\mathfrak{v}|\frac{dL}{d|\mathfrak{v}|} - L = \frac{e^2}{2a}\left\{\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1\right\}.$$

Da die Kräftefunktion gleich der Differenz der elektrischen Energie U und der magnetischen T ist, so erhalten wir durch Addition und Subtraktion von (113b) und (113)

$$(113\text{c})\qquad U = \frac{1}{2}\left(W + V\right) = \frac{e^2}{4a}\left\{\left(\frac{3-\beta^2}{2\beta}\right)\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1\right\},$$

$$(113\text{d})\qquad T = \frac{1}{2}\left(W - V\right) = \frac{e^2}{4a}\left\{\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta}\right)\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1\right\}.$$

Die letztere Formel hätte natürlich auch aus (113a) abgeleitet werden können, da ja nach (103) die doppelte magnetische Energie dem Produkte aus Geschwindigkeit und Impuls gleich ist. Entwickelt man die beiden letzten Ausdrücke in Reihen, die nach Potenzen von β^2 fortschreiten, und vernachlässigt Größen der Ordnung β^4, so wird

$$(113\text{e})\qquad U = U_0 = \frac{e^2}{2a},$$

$$(113\text{f})\qquad T = \frac{e^2}{3a}\cdot\beta^2.$$

Für Bewegungen des Elektrons, deren Geschwindigkeit klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist, ist die elektrische Energie von der Geschwindigkeit unabhängig, während die magnetische Energie dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist. Erstere ist mithin der potentiellen, letztere der kinetischen Energie der gewöhnlichen Mechanik zu vergleichen. Diese Analogie ist nicht auf geringe Geschwindigkeiten beschränkt; die Ableitung der Gesamtenergie und des Impulses aus der als Differenz der beiden Energiearten definierten Lagrangeschen Funktion, die für beliebige Geschwindigkeit galt, erinnert an Beziehungen, die aus der analytischen Mechanik

bekannt sind; wir kommen hierauf im nächsten Paragraphen zurück.

Haben wir es nicht mit dem Falle der Flächenladung, sondern mit dem Falle der Volumladung des kugelförmigen Elektrons zu tun, so können wir die Lagrangesche Funktion, die Energie und den Impuls sofort angeben, auf Grund des Satzes, den wir am Schlusse des vorigen Paragraphen bewiesen haben (Gl. 108). Im Falle der Volumladung werden die Werte der Kräftefunktion, und demnach auch diejenigen der Energie und des Impulses, aus den im Falle der Flächenladung geltenden einfach durch Multiplikation mit dem Zahlenfaktor 6 : 5 abgeleitet. Mit diesem Faktor sind also die rechten Seiten der Gleichungen (113) bis (113f) beim Übergange zur Volumladung zu multiplizieren.

Aus dem am Eingange dieses Paragraphen und in dem des vorigen Gesagten geht ohne weiteres hervor, daß diese Formeln nur für den Fall der Unterlichtgeschwindigkeit die Energie und die Bewegungsgröße des mitgeführten Feldes bestimmen.

Die magnetische Energie einer langsam bewegten, flächenhaft geladenen Kugel wurde zuerst von O. Heaviside[14]) richtig angegeben (1889). Die Gesamtenergie der leitenden Kugel wurde von G. F. C. Searle[52]) ermittelt (1897). Die Bewegungsgröße des kugelförmigen Elektrons und die Beziehungen zwischen Lagrangescher Funktion, Energie und Bewegungsgröße wurden vom Verfasser[1]) dieses Werkes gefunden (1902), der auch den Fall der Volumladung in der hier wiedergegebenen Weise erledigte.

§ 20. Die elektromagnetische Masse.

Wir haben im letzten Paragraphen bewiesen, daß das Elektron, wenn äußere Kräfte nicht wirken, in seiner gleichförmigen rein translatorischen Bewegung verharrt, wofern seine Geschwindigkeit kleiner ist als die Lichtgeschwindigkeit. Diese Folgerung aus den angenommenen Grundhypothesen ist in

Übereinstimmung mit den bei Kathodenstrahlen und Radiumstrahlen gewonnenen experimentellen Ergebnissen; werden die Strahlen durch kein äußeres Feld beeinflußt, so erfolgt ihre Fortpflanzung geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit.

Wie das erste, so hat auch das zweite Axiom der Mechanik Newtons sich experimentell in gewissem Sinne bestätigt. Die träge Masse der Strahlteilchen ist zwar nicht eine unabänderliche wie die Masse der gewöhnlichen Mechanik. Sie ist nur bei langsamer Bewegung konstant; bei den β-Strahlen des Radiums hängt sie von der Geschwindigkeit der Elektronen ab. Immerhin hat sich in dem Bereiche, auf welches sich die Experimente beziehen, die Masse insofern als konstant erwiesen, als sich der Betrag der transversalen Beschleunigung bei gegebener Geschwindigkeit dem Betrage der transversalen äußeren Kraft proportional ergab. Der Dynamik des Elektrons erwächst die Aufgabe, von diesem Verhalten Rechenschaft zu geben, und, der experimentellen Forschung voranleuchtend, den Begriff der elektromagnetischen Masse präzise zu formulieren.

Um das in dem angegebenen Sinne erweiterte zweite Axiom Newtons aus den Grundgleichungen unserer Theorie zu deduzieren, müssen wir offenbar ausgehen von solchen Bewegungen, welche dem ersten Axiome Genüge leisten; diese Bedingung erfüllen die soeben behandelten rotationslosen Bewegungen des allseitig symmetrischen Elektrons. Nur dann, wenn die kräftefreie Bewegung geradlinig und gleichförmig ist, können wir erwarten, die erteilte Beschleunigung der äußeren Kraft proportional zu finden. Auch für ein kugelförmiges Elektron ist dieses Verhalten nur unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen über den Betrag der Beschleunigung und der Geschwindigkeit möglich.

Wie nämlich in § 17 dargelegt wurde, ist die Aussage der dynamischen Grundgleichungen eine äußerst verwickelte. Auch bei rein translatorischen Bewegungen hängt die innere Kraft, welche das Elektron auf sich selbst ausübt, von der Geschwindigkeit und von der Beschleunigung ab, welche das Elektron während eines gewissen, dem betreffenden Zeitpunkte

vorangegangenen Zeitintervalles erfahren hat. Eine Proportionalität der Kraft zur jeweiligen Beschleunigung und eine Abhängigkeit der Masse von der jeweiligen Geschwindigkeit allein kann daher in Strenge nicht stattfinden. Nur wenn die Beschleunigung hinreichend gering ist, wenn also die Geschwindigkeit nach Richtung und Betrag sich nur langsam ändert, wird das Verhalten des Elektrons durch eine „elektromagnetische Masse" zu charakterisieren sein.

Wir deuteten bereits im Eingange dieses Kapitels die Analogie an, die zwischen der elektromagnetischen Masse der konvektiv bewegten Elektrizität und der Selbstinduktion eines Leitungsstromes besteht. Wie die Selbstinduktion mit der magnetischen Energie des Leitungsstromes zusammenhängt (Bd. I, § 70), so ist die elektromagnetische Masse mit der Bewegungsgröße und der Energie des mitgeführten Feldes verknüpft. Nun war aber der Gültigkeitsbereich des Begriffes der Selbstinduktion auf langsam veränderliche, oder, wie wir sagten, „quasistationäre" Ströme beschränkt. Ein Strom wurde quasistationär genannt (Bd. I, S. 266), wenn seine Stromstärke sich nur relativ wenig änderte in der Zeit, welche die elektromagnetischen Störungen gebrauchen, um den Abstand zwischen den beiden entferntesten Punkten des Stromsystemes zu durchmessen. Nur unter dieser Bedingung konnte die magnetische Energie so berechnet werden, als ob das Feld wie beim stationären Strome der jeweiligen Stromstärke augenblicklich folgte. Auf solche quasistationäre Ströme allein ist die gebräuchliche Theorie des Wechselstromes anzuwenden, die im ersten Bande dieses Werkes (Abschnitt III, Kap. 2) vorgetragen wurde. Dementsprechend wird der Begriff der elektromagnetischen Masse nur auf „quasistationäre Bewegungen" des Elektrons angewendet werden dürfen; es wird eine Bewegung dann quasistationär zu nennen sein, wenn ihre Geschwindigkeit sich nur wenig ändert in der Zeit, welche das Licht gebraucht, um über das Elektron hinwegzustreichen. Für quasistationäre Bewegungen werden wir die Bewegungsgröße und die Energie so berechnen, als ob das mitgeführte Feld der jeweiligen Ge-

schwindigkeit entspräche, d. h. wir werden diejenigen Werte des Impulses und der Energie verwenden, die wir im vorigen Paragraphen für gleichförmige Bewegungen abgeleitet haben. Die Gültigkeitsgrenzen der Theorie der quasistationären Bewegung werden wir in einem späteren Paragraphen abstecken; wir werden sehen, daß diese Theorie alle beobachtbaren Ablenkungen und Beschleunigungen mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegter Elektronen umfaßt.

Dem Impulssatze (94) zufolge ist die zeitliche Änderung des Impulsvektors $\mathfrak{G}$ des Elektrons der äußeren elektromagnetischen Kraft $\mathfrak{K}^a$ gleich:

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \mathfrak{K}^a. \tag{114}$$

Bei quasistationärer Bewegung wird, wie bei gleichförmiger Bewegung, der Betrag des Impulses als Funktion des Betrages der Geschwindigkeit allein betrachtet und die Richtung des Impulses wie bei einer jeden dem ersten Axiome gehorchenden Bewegung der Bewegungsrichtung parallel vorausgesetzt. Es liegt mithin der Vektor, welcher die zeitliche Änderung des Impulses angibt, stets in der Oskulationsebene der Bahn. Es ist zweckmäßig, ihn in zwei Vektoren zu zerlegen, von denen der erste der Bewegungsrichtung parallel ist, während der zweite nach dem Krümmungsmittelpunkte der Bahn weist; die Richtungen, nach denen zerlegt wird, sollen durch zwei Einheitsvektoren $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{N}_1$ gekennzeichnet werden, welche der Tangente bzw. der Hauptnormale der Bahn parallel sind. Nach diesen Richtungen hatten wir in Bd. I, § 5 den Beschleunigungsvektor zerlegt. Wir können Gl. 14a, S. 14 daselbst schreiben:

$$\dot{\mathfrak{v}} = \mathfrak{t}_1 \frac{d|\mathfrak{v}|}{dt} + \mathfrak{N}_1 \cdot \frac{|\mathfrak{v}|^2}{R}. \tag{114a}$$

Ferner lautet Gleichung (11) daselbst

$$\frac{d\mathfrak{t}_1}{ds} = \frac{\mathfrak{N}_1}{R}, \tag{114b}$$

wobei ds das Wegelement der Bahnkurve vorstellt

In ganz entsprechender Weise, wie wir dort den Geschwindigkeitsvektor differentiierten, können wir jetzt den Vektor

$$(114c) \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{t}_1 |\mathfrak{G}|$$

nach der Zeit differentiieren.

Es wird, mit Rücksicht auf (114b):

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \dot{\mathfrak{G}} = \mathfrak{t}_1 \frac{d|\mathfrak{G}|}{dt} + \frac{\mathfrak{N}_1}{R} \frac{ds}{dt} |\mathfrak{G}|,$$

und da man hat:

$$\frac{ds}{dt} = |\mathfrak{v}|, \quad \frac{d|\mathfrak{G}|}{dt} = \frac{d|\mathfrak{G}|}{d|\mathfrak{v}|} \frac{d|\mathfrak{v}|}{dt},$$

so wird

$$(114d) \qquad \dot{\mathfrak{G}} = \mathfrak{t}_1 \frac{d|\mathfrak{G}|}{d|\mathfrak{v}|} \frac{d|\mathfrak{v}|}{dt} + \frac{\mathfrak{N}_1}{R} |\mathfrak{G}| |\mathfrak{v}|.$$

Diese Formel gilt für jeden Vektor, dessen Richtung zu $\mathfrak{v}$ parallel, und dessen Betrag durch den Betrag von $\mathfrak{v}$ bestimmt ist. Speziell für die zeitliche Änderung von $\mathfrak{v}$ selbst geht sie über in die Gleichung (114a).

Andererseits lautet die Bewegungsgleichung (114)

$$(114e) \qquad \dot{\mathfrak{G}} = \mathfrak{t}_1 \mathfrak{K}_s^a + \mathfrak{N}_1 \mathfrak{K}_r^a,$$

hier sind unter $\mathfrak{K}_s^a$ und $\mathfrak{K}_r^a$ die Komponenten der äußeren Kraft zu verstehen, welche parallel bzw. senkrecht zur Bewegungsrichtung wirken; die Ebene der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und der äußeren Kraft $\mathfrak{K}^a$ bestimmt die Oskulationsebene der Bahn wie in der Mechanik des materiellen Punktes.

Wir schreiben jetzt (114d) und (114a)

$$\dot{\mathfrak{G}} = \mathfrak{t}_1 \dot{\mathfrak{G}}_s + \mathfrak{N}_1 \dot{\mathfrak{G}}_r,$$

$$\dot{\mathfrak{v}} = \mathfrak{t}_1 \dot{\mathfrak{v}}_s + \mathfrak{N}_1 \dot{\mathfrak{v}}_r,$$

und erhalten

$$(114g) \qquad \frac{\mathfrak{K}_s^a}{\dot{\mathfrak{v}}_s} = \frac{\dot{\mathfrak{G}}_s}{\dot{\mathfrak{v}}_s} = \frac{d|\mathfrak{G}|}{d|\mathfrak{v}|},$$

$$(114h) \qquad \frac{\mathfrak{K}_r^a}{\dot{\mathfrak{v}}_r} = \frac{\dot{\mathfrak{G}}_r}{\dot{\mathfrak{v}}_r} = \frac{|\mathfrak{G}|}{|\mathfrak{v}|}.$$

Die Quotienten aus longitudinaler Kraftkomponente und longitudinaler Beschleunigungskomponente

sowie aus transversaler Kraftkomponente und Beschleunigungskomponente sind für quasistationäre Bewegungen beide nur Funktionen der Geschwindigkeit.

In diesem Sinne erweist sich das zweite Axiom Newtons in der Dynamik des Elektrons als gültig. Wir erhalten jetzt für die „longitudinale elektromagnetische Masse", d. h. für den Quotienten der parallel der Bewegungsrichtung genommenen Komponenten von äußerer Kraft und Beschleunigung:

$$m_s = \frac{d|\mathfrak{G}|}{d|\mathfrak{v}|}. \tag{115}$$

Für die „transversale elektromagnetische Masse" hingegen, d. h. für den Quotienten der zur Bewegungsrichtung senkrechten Komponenten von äußerer Kraft und Beschleunigung folgt

$$m_r = \frac{|\mathfrak{G}|}{|\mathfrak{v}|}. \tag{115a}$$

Im allgemeinen ist die longitudinale Masse von der transversalen verschieden. Nur im Grenzfalle langsamer Bewegung, wo der Impuls des Elektrons seiner Geschwindigkeit proportional ist, stimmen die rechten Seiten von (115) und (115a) überein; wir wollen diesen gemeinsamen Grenzwert der longitudinalen und der transversalen Masse mit m_0 bezeichnen; für langsame Kathodenstrahlen ist es erlaubt, mit ihm so zu rechnen, wie es in § 2 geschah.

Diese Formeln, welche die Masse des Elektrons mit seiner Bewegungsgröße verknüpfen, und die vom Verfasser dieses Werkes zuerst angegeben wurden, sind unabhängig von jeder Annahme über die Form und die Ladungsverteilung des Elektrons. Sie gelten immer dann, wenn der Impulsvektor der Bewegungsrichtung parallel weist und sein Betrag eine beliebige Funktion des Betrages der Geschwindigkeit ist. Wünscht man die Dynamik des Elektrons rein elektromagnetisch zu begründen, so hat man für $|\mathfrak{G}|$ den Betrag der elektromagnetischen Bewegungsgröße einzusetzen.

Man kann die elektromagnetische Masse auch mit der elektromagnetischen Energie des Elektrons in Verbindung bringen; die Energiegleichung (96) ergibt für rein translatorische Bewegungen

$$\frac{dW}{dt} = (\mathfrak{v}\,\mathfrak{K}^a) = |\mathfrak{v}|\,\mathfrak{K}^a_s.$$

Für quasistationäre Bewegungen wird die Energie des Elektrons als Funktion des Betrages der Geschwindigkeit betrachtet; es wird daher

$$\frac{dW}{d|\mathfrak{v}|}\frac{d|\mathfrak{v}|}{dt} = |\mathfrak{v}|\,\mathfrak{K}^a_s.$$

Hieraus ergibt sich die „longitudinale Masse", die als Quotient der longitudinalen Beschleunigung und Kraft definiert wurde,

$$m_s = \frac{1}{|\mathfrak{v}|}\frac{dW}{d|\mathfrak{v}|}\,. \tag{115b}$$

Diese Formel verknüpft die longitudinale Masse des Elektrons mit seiner Energie. Die transversale Masse wird selbstverständlich durch die Energiegleichung nicht bestimmt, da ja eine transversale Kraft keine Arbeit leistet.

Die aus der Energiegleichung abgeleitete Formel (115b) ist ebenso wie die aus dem Impulssatze gewonnenen Formeln (115) und (115a) unabhängig von jeder Annahme über die Form und die Ladungsverteilung des Elektrons. Sie fußt ebenso wie jene allein auf den Grundgleichungen (I bis V) der Elektronentheorie, aus denen ja die Energiegleichung und die Impulsgleichung als Folgerungen sich ergaben. Man könnte diese Formel ebenso wie jene auch dann verwenden, wenn man annähme, daß wägbare Materie mit dem Elektron verkoppelt sei; alsdann wäre in W die Energie, in $\mathfrak{G}$ die Bewegungsgröße der wägbaren Materie mit in Rechnung zu ziehen.

Dem von uns vertretenen Standpunkte getreu, werden wir indessen unter $\mathfrak{G}$ stets den elektromagnetischen Impuls, unter W die elektromagnetische Energie verstehen. Von einer rein elektromagnetisch begründeten Dynamik des Elek-

trons werden wir unter allen Umständen verlangen müssen, daß die beiden Formeln (115) und (115b) für die longitudinale Masse des Elektrons zu demselben Ergebnisse führen. Würde die Formel (115b) unter Annahme rein elektromagnetischer Energie zu einem anderen Wert von m_s ergeben als die Formel (115) unter Annahme einer rein elektromagnetischen Bewegungsgröße, so würde ein innerer Widerspruch unseres Hypothesensystemes zutage treten. Man könnte diesen Widerspruch durch Einführung einer inneren, nicht elektromagnetischen Energie des Elektrons heben; dann würde man aber das Ziel einer rein elektromagnetischen Begründung der Mechanik der Elektronen nicht erreichen.

In unserer, auf den Grundgleichungen (VI) und (VII) fußenden Dynamik des Elektrons entsteht nun der besagte Widerspruch nicht. In der Tat, wir hatten im vorigen Paragraphen bewiesen, daß unter Voraussetzung einer unveränderlichen Verteilung der Ladung im Elektron, Impuls und Energie durch die Formeln (111) und (111a) mit der Lagrangeschen Funktion verknüpft sind. Hieraus hatten wir die Beziehung (111b) abgeleitet; diese Beziehung

$$\frac{d\,|\mathfrak{G}|}{d\,|\mathfrak{v}|} = \frac{1}{|\mathfrak{v}|}\frac{dW}{d\,|\mathfrak{v}|} = \frac{d^2 L}{d\,|\mathfrak{v}|^2}$$

besagt nichts anderes, als daß die Ausdrücke (115) und (115b) beide den gleichen Wert der longitudinalen Masse ergeben. Wir sehen also: Unter Annahme einer von der Geschwindigkeit unabhängigen Gestalt und Ladungsverteilung des Elektrons ergeben Impulssatz und Energiesatz den gleichen Wert der longitudinalen elektromagnetischen Masse. Hier tritt der Zusammenhang zwischen unserer kinematischen Grundhypothese (VII) und dem Gedanken einer rein elektromagnetischen Begründung der Dynamik des Elektrons, der bereits in § 16 erörterte wurde, deutlich hervor. Lassen wir diese Grundhypothese fallen und nehmen an, daß die Form des Elektrons sich mit der Geschwindigkeit ändert, so ergibt die Energiegleichung einen anderen Wert der longitudinalen elektromagnetischen Masse als

die Impulsgleichung; in diesem Falle — ein Beispiel werden wir im § 22 kennen lernen — kann von einer elektromagnetischen Begründung keine Rede mehr sein.

Jene kinematische Grundhypothese war den kinematischen Bedingungsgleichungen der analytischen Mechanik nachgebildet. Wir sind jetzt in der Lage zu zeigen, daß unsere Grundgleichungen für die Dynamik quasistationärer Bewegungen zu Ergebnissen führen, welche formal mit denen der Mechanik Lagranges übereinstimmen. Führen wir in die Gleichung

$$\dot{\mathfrak{G}}_s = \frac{d\,|\mathfrak{G}|}{dt} = \mathfrak{K}_s^a$$

die Relation (111) ein, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\,|\mathfrak{v}|} = \mathfrak{K}_s^a \,. \tag{116}$$

Wir schreiben hier partielle Differentiationszeichen, weil wir weiter unten L noch von anderen Größen als nur von $|\mathfrak{v}|$, abhängen lassen.

Diese Bewegungsgleichung entspricht den Lagrangeschen Gleichungen eines Systemes bewegter Massen. Bedeutet $L = T - U$ die Differenz der kinetischen und potentiellen Energie des Systemes, so lauten die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen, die in Bd. I, § 15, Gl. 64a, S. 45 abgeleitet worden sind:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial L}{\partial p_\lambda} = P_\lambda \,. \tag{116a}$$

Aus einer solchen Lagrangeschen Gleichung läßt sich nun formal unsere Bewegungsgleichung (116) ableiten. Wählen wir als „Antriebspunkt“ etwa den Mittelpunkt des Elektrons, so ist p_λ mit dem durchlaufenen Wege s zu identifizieren, q_λ mit $\frac{ds}{dt}$, d. h. mit $|\mathfrak{v}|$, während P_λ die äußere, der Bewegungsrichtung parallele Kraftkomponente $\mathfrak{K}_s^a$ ist. Da nun in dem vorliegenden Falle die Lagrangesche Funktion von dem durchlaufenen Wege s unabhängig ist, so geht in der Tat die Lagrangesche Gleichung (116a) in (116) über.

Wählen wir andererseits für p_λ einen Parameter, welcher die Konfiguration eines gleichförmig bewegten Systemes elektrischer Ladungen bestimmt, so ergibt (116a)

$$\frac{\partial L}{\partial p_\lambda} + P_\lambda = 0. \tag{116b}$$

Auch diese Beziehung stimmt mit unserer Theorie überein. Denn wir hatten in § 18 gezeigt, daß die inneren Kräfte, die in einem gleichförmig bewegten Systeme von Ladungen wirken, sich aus einer Kräftefunktion V ableiten lassen; diese Kräftefunktion, deren Abnahme der Arbeit der inneren Kräfte gleich ist, war, nach (104b), entgegengesetzt gleich der Lagrangeschen Funktion L. Es stellt also auch in unserer Theorie (116b) die Bedingung des Gleichgewichtes der inneren und der äußeren Kräfte in einem gleichförmig bewegten Systeme elektrischer Ladungen dar.

Sucht man, mit Maxwell und Hertz, die Gesetze der Elektrodynamik aus den Prinzipien der Mechanik abzuleiten, so muß man im elektromagnetischen Felde verborgene Bewegungen träger Massen annehmen. Identifiziert man die magnetische Energie mit der kinetischen, die elektrische mit der potentiellen Energie dieser Massen, so gelangt man auf Grund der Lagrangeschen Gleichungen in der Tat zu Ergebnissen, welche der Form nach mit denen unserer Theorie durchaus übereinstimmen. Es ist indessen zu bemerken, daß in der analytischen Mechanik die kinetische Energie T als Funktion zweiten Grades der Geschwindigkeiten der Antriebspunkte angenommen, die potentielle Energie U als unabhängig von der Geschwindigkeit betrachtet wird. In dem vorliegenden Falle hingegen sind T und U Funktionen der Geschwindigkeit des Elektrons, T aber keineswegs eine Funktion zweiten Grades. Wir befinden uns demnach keineswegs auf dem Boden der Annahmen, von denen die analytische Mechanik ausgeht. Dennoch haben wir, von den Grundgleichungen (I bis VII) der Mechanik der Elektronen ausgehend, wenigstens für stationäre und quasistationäre Bewegungen, die Lagrangeschen Gleichungen als gültig erwiesen. W i r h a b e n g e z e i g t, daß i n u n s e r e r

rein elektromagnetischen Dynamik des Elektrons die Lagrangeschen Gleichungen gelten. Dadurch haben wir den Gültigkeitsbereich der Lagrangeschen Mechanik wesentlich erweitert, indem wir ihn von langsamen Bewegungen, bei denen T eine quadratische Funktion der Geschwindigkeit ist, auf beliebig rasche Bewegungen (mit Unterlichtgeschwindigkeit) ausgedehnt haben. Wir haben ferner in der Dynamik des einzelnen Elektrons den Grundgedanken des elektromagnetischen Weltbildes (§ 16) zur Durchführung gebracht, welcher fordert, nicht die elektrische und magnetische Energie auf die potentielle und kinetische Energie der Mechanik, sondern umgekehrt die kinetische und die potentielle Energie auf die magnetische und elektrische Energie zurückzuführen.

Wir kehren nunmehr zum speziellen Falle des kugelförmigen Elektrons zurück. Wir setzen für den Betrag des Impulses den in (113a) erhaltenen Wert ein und berechnen auf Grund der Formeln (115) und (115a) die longitudinale und transversale Masse. Wir finden

$$m_s = \frac{e^2}{2ac^2} \cdot \frac{1}{\beta^2}\left\{-\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) + \frac{2}{1-\beta^2}\right\}, \tag{117}$$

$$m_r = \frac{e^2}{2ac^2} \cdot \frac{1}{\beta^2}\left\{\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta}\right)\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1\right\}. \tag{117a}$$

Für Geschwindigkeiten, die so klein sind gegen die Lichtgeschwindigkeit, daß β^2 gegen 1 zu vernachlässigen ist, ergibt sich als gemeinsamer Grenzwert der longitudinalen und der transversalen Masse

$$m_0 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2}. \tag{117b}$$

Die Formeln (117, 117a, b) gelten im Falle der Flächenladung.

Im Falle der Volumladung, wo die Bewegungsgröße im Verhältnis 6 : 5 vermehrt ist, sind alle drei Ausdrücke mit diesem Faktor zu multiplizieren. Es wird z. B.

$$m_0 = \frac{4}{5}\frac{e^2}{ac^2}. \tag{117c}$$

Wir fassen beide Fälle, den der Flächenladung und den der Volumladung des kugelförmigen Elektrons, zusammen, indem wir schreiben

$$(117\text{d})\qquad \begin{cases} m_s = m_0 \cdot \frac{3}{4}\chi(\beta), \\ \chi(\beta) = \frac{1}{\beta^2}\left\{-\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) + \frac{2}{1-\beta^2}\right\}, \end{cases}$$

$$(117\text{e})\qquad \begin{cases} m_r = m_0 : \frac{3}{4}\psi(\beta), \\ \psi(\beta) = \frac{1}{\beta^2}\left\{\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta}\right)\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1\right\}. \end{cases}$$

Für m_0 ist hier im Falle der Flächenladung der Wert (117b), im Falle der Volumladung der Wert (117c) zu setzen. Für die spezifische Ladung langsamer Kathodenstrahlen folgt im ersteren Falle

$$\eta_0 = \frac{e}{cm_0} = \frac{3}{2}\frac{ac}{e},$$

woraus sich für den Radius des Elektrons ergibt

$$a = \frac{2}{3}\eta_0 \cdot \frac{e}{c}.$$

Wir führen hier den in Gleichung (2) angegebenen Wert des elektrischen Elementarquantums und den aus den Kaufmannschen Messungen an Becquerelstrahlen durch Extrapolation abgeleiteten Wert der spezifischen Ladung (Gl. 123 in § 21) ein:

$$\frac{e}{c} = 10^{-20}, \quad \eta_0 = 1{,}82 \cdot 10^7.$$

Wir erhalten dann

$$(118)\qquad a = 1{,}21 \cdot 10^{-13}\,\text{cm (Flächenladung)}.$$

Im Falle der Volumladung ist dieser Wert mit 6 : 5 zu multiplizieren; er wird

$$(118\text{a})\qquad a = 1{,}46 \cdot 10^{-13}\,\text{cm (Volumladung)}.$$

Diese Zahlen sind natürlich mit denselben Fehlern behaftet wie die Bestimmungen von e und η_0. Immerhin kann man wohl behaupten: Der Radius des Elektrons ist

wenn man die Masse als rein elektromagnetisch annimmt, in die Grenzen

$$10^{-13} < a < 2 \cdot 10^{-13}$$

einzuschließen. An Stelle der Formeln (117d, e) kann man auch die Reihenentwickelungen setzen

$$(118\text{b}) \qquad m_s = m_0 \left\{1 + \frac{6}{5}\beta^2 + \frac{9}{7}\beta^4 + \frac{12}{9}\beta^6 + \cdots\right\},$$

$$(118\text{c}) \qquad m_r = m_0 \left\{1 + \frac{6}{3 \cdot 5}\beta^2 + \frac{9}{5 \cdot 7}\beta^4 + \frac{12}{7 \cdot 9}\beta^6 + \cdots\right\}.$$

Für Unterlichtgeschwindigkeit — und nur hier gelten die Formeln (117d, e) überhaupt — sind diese Reihen konvergent. Man sieht, daß bei rascher Bewegung die longitudinale Masse stets größer ist als die transversale. Wirkt eine Kraft schief zur Bewegungsrichtung, so ist die Beschleunigung keineswegs der Kraft parallel; der Beschleunigungsvektor schließt vielmehr, da die longitudinale Trägheit die transversale überwiegt, mit der Bahntangente im allgemeinen einen größeren Winkel ein als der Kraftvektor. Nur wenn die Kraft parallel oder senkrecht zur Bewegungsrichtung wirkt, stimmen Kraft und Beschleunigung der Richtung nach überein. Die Masse ist eben in der Dynamik des Elektrons kein Skalar wie in der gewöhnlichen Mechanik. Die Kraft ist hier eine lineare Vektorfunktion (Bd. I, § 14) der Beschleunigung von allgemeinerer Art. Die „elektromagnetische Masse“ ist das Koeffizientensystem der Gleichungen, welche die Kraftkomponenten durch die Beschleunigungskomponente ausdrücken. Das System der elektromagnetischen Massen ist ein Tensortripel von rotatorischer Symmetrie um die Bewegungsrichtung des Elektrons; es ist etwa zu vergleichen dem Systeme der Trägheitsmomente eines Rotationskörpers, welches gleichfalls durch zwei Größen, das Moment um die Rotationsachse und um eine zu ihr senkrechte Achse, erst bestimmt wird; es ist in entsprechender Weise geometrisch darzustellen.

§ 21. Die Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen und der β-Strahlen.

Bei schnellen Kathodenstrahlen und bei den sogenannten β-Strahlen radioaktiver Körper hat man es mit negativen Elektronen zu tun, deren Geschwindigkeit keineswegs klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist; hier kommt die Unterscheidung der longitudinalen und der transversalen Masse in Betracht. Für die Ablenkbarkeit der Strahlen ist selbstverständlich die transversale Masse m_r und die entsprechende „transversale spezifische Ladung"

$$\eta_r = \frac{e}{c m_r} \tag{119}$$

maßgebend. Dabei ist e der elektrostatisch gemessene Betrag der Ladung.

Werden die β-Strahlen durch ein zur ursprünglichen Strahlrichtung senkrechtes magnetisches Feld abgelenkt, so ist die Bahnkrümmung gemäß Gleichung (7)

$$\frac{1}{R} = \eta_r \cdot \frac{|\mathfrak{H}^a|}{|\mathfrak{v}|}. \tag{119a}$$

Die Geschwindigkeit bleibt bei der Bewegung im magnetischen Felde konstant, da die im magnetischen Felde auf die Elektronen wirkende Kraft stets senkrecht zur Bewegungsrichtung gerichtet ist; der einzige Unterschied gegenüber langsamen Kathodenstrahlen liegt hier darin, daß η_r eine Funktion der Geschwindigkeit ist. Es ist nach (117e)

$$\eta_r = \eta_0 \cdot \frac{4}{3\psi(\beta)}. \tag{119b}$$

Bei der Bewegung im elektrischen Felde liegt die Sache komplizierter. Zunächst ist der Zuwachs der Energie auf einem gewissen Wege der Arbeit der elektrischen Kraft gleich. Die Geschwindigkeitsänderung des negativen Elektrons auf einem gewissen Wege ist dementsprechend im elektrostatischen Felde bestimmt durch

$$W - W_0 = e(\varphi - \varphi_0), \tag{120}$$

wo gemäß (113b) und (117b) zu setzen ist

$$W - W_0 = \frac{3}{4} m_0 c^2 \left\{ \frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - \frac{1}{\beta_0} \ln\left(\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}\right) \right\}. \tag{120a}$$

Sind die ursprüngliche Geschwindigkeit $c\beta_0$ und die durchlaufene Potentialdifferenz bekannt, so ist die Endgeschwindigkeit $c\beta$ aus der transzendenten Gleichung zu berechnen

$$\frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) = \frac{1}{\beta_0} \ln\left(\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}\right) + \frac{4}{3} \frac{\eta_0}{c} (\varphi - \varphi_0). \tag{120b}$$

Für kleine Werte von β_0 und β gilt näherungsweise

$$\beta^2 + \frac{3}{5}\beta^4 \cdots = \beta_0^2 + \frac{3}{5}\beta_0^4 + \cdots + \frac{2\eta_0}{c} (\varphi - \varphi_0); \tag{120c}$$

vernachlässigt man hier β^4 gegen β^2, β_0^4 gegen β_0^2, so gelangt man zur Gleichung (5a) zurück. Aber auch bei Kathodenstrahlen wird man, wenn es sich um genaue Messungen handelt, gut tun, die Gleichung (120c) an Stelle von (5a) zu setzen. Liegt etwa der in § 2 erörterte Fall vor, daß den Kathodenstrahlen durch ein elektrostatisches Feld ihre ganze Geschwindigkeit erteilt worden ist, so ist in (120c) β_0 gleich Null zu setzen. Tritt der Kathodenstrahl nun in ein magnetisches Feld ein, so bestimmt sich die Bahnkrümmung aus (119a), wobei derjenige Wert von η_r in Rechnung zu ziehen ist, welcher dem aus (120c) zu ermittelnden Werte von β nach (119b) entspricht.

Bei geradliniger Bewegung im longitudinalen elektrostatischen Felde reicht die aus der Energiegleichung abgeleitete Relation (120b) aus. Besitzt indessen das elektrische Feld auch eine transversale Komponente, so bestimmt die Energiegleichung nicht vollständig die Bewegung; es ist die Impulsgleichung heranzuziehen. Diese ergibt, für die Ladung $-e$:

$$\mathfrak{G} - \mathfrak{G}_0 = -e \int_{t_0}^{t} \mathfrak{E}^a \, dt. \tag{121}$$

Handelt es sich um ein homogenes äußeres elektrisches Feld, wie es sich zwischen zwei Kondensatorplatten herstellt, so ist

$$\mathfrak{G} - \mathfrak{G}_0 = -e \mathfrak{E}^a (t - t_0) \tag{121a}$$

die Änderung des Impulses des negativen Elektrons. Die Bewegungsrichtung des Elektrons ist stets seinem Impulse parallel; daher folgt aus (115a) und (117e)

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{v} m_r = \mathfrak{v} m_0 \frac{3}{4} \psi(\beta),$$

so daß (121a) zu schreiben ist

$$\mathfrak{v}\psi(\beta) - \mathfrak{v}_0\psi(\beta_0) = -\frac{4}{3} c \eta_0 \mathfrak{E}^a (t - t_0). \tag{121b}$$

Kennt man die anfängliche Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ und die Zeit, während deren das negative Elektron das homogene Feld durcheilt, so ist durch diese Beziehung die Endgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ der Größe und der Richtung nach bestimmt.

Auch ein zur ursprünglichen Bewegungsrichtung senkrechtes elektrisches Feld ändert, im Gegensatz zu dem magnetischen Felde, den Betrag der Geschwindigkeit, weil im Verlaufe der Bewegung $\mathfrak{v}$ eine zu $\mathfrak{E}^a$ parallele Komponente erhält. Ist indessen die Ablenkung des Strahles durch das transversale elektrische Feld nur gering, so kann man die Änderung des Betrages der Geschwindigkeit vernachlässigen und an Stelle von (121b) die vereinfachte Beziehung setzen

$$(\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0)\psi(\beta) = -\frac{4}{3} c \eta_0 \mathfrak{E}^a (t - t_0), \tag{121c}$$

indem man β als konstant ansieht. Ist etwa die x-Achse der ursprünglichen Bewegungsrichtung parallel, so gilt in diesem Grenzfalle unendlich geringer Ablenkung ferner

$$x - x_0 = (t - t_0)\,|\mathfrak{v}|$$

und, wenn $\mathfrak{E}^a$ parallel der negativen y-Achse weist,

$$\frac{dy}{dt}\psi(\beta) = +\frac{4}{3} c \eta_0 |\mathfrak{E}^a| (t - t_0).$$

Es folgt daher als gesamte, beim Durchlaufen des elektrischen Feldes stattfindende Ablenkung parallel der y-Achse

$$y = c \eta_r |\mathfrak{E}^a| \frac{(t - t_0)^2}{2} = c \eta_r |\mathfrak{E}^a| \frac{(x - x_0)^2}{2|\mathfrak{v}|^2}. \tag{121d}$$

Die unendlich kleine elektrische Ablenkung ist bei langsamen Kathodenstrahlen dem Quadrate der

Geschwindigkeit umgekehrt proportional, die magnetische der Geschwindigkeit. Letzteres folgt aus (119a), da eine unendlich kleine Ablenkung im magnetischen Felde dem Krümmungsradius R umgekehrt proportional ist. Bei den Radiumstrahlen hingegen nehmen beide Ablenkungen stärker mit wachsender Geschwindigkeit der Strahlen ab; denn es nimmt die transversale spezifische Ladung η_r, nach (119b), mit wachsender Geschwindigkeit ab.

Durch Kombination von (119a) und (121d) folgt

$$\frac{|\mathfrak{v}|}{c} = \beta = \frac{|\mathfrak{E}^a|}{|\mathfrak{H}^a|} \cdot \frac{(x-x_0)^2}{2} \cdot \frac{1}{yR}, \tag{122}$$

$$\eta_r = \eta_0 \frac{4}{3\psi(\beta)} = \frac{|\mathfrak{E}^a|}{|\mathfrak{H}^a|^2} \cdot \frac{c(x-x_0)^2}{2} \cdot \frac{1}{yR^2}. \tag{122a}$$

Es kann also durch Kombination der magnetischen und der elektrischen Ablenkung sowohl die Geschwindigkeit als auch die transversale spezifische Ladung ermittelt und so die von der Theorie geforderte Beziehung zwischen diesen beiden Größen experimentell geprüft werden.

Dieses Ziel war es, welches W. Kaufmann[28]) bei seinen Untersuchungen verfolgte. Läßt man die von einem Körnchen Radiumbromid ausgehende Strahlung durch eine kleine Öffnung treten, so bildet sich die Öffnung auf einer senkrecht zur Strahlrichtung gestellten photographischen Platte als Punkt ab. Bei elektrischer Ablenkung wird, infolge der verschiedenen Geschwindigkeiten der Elektronen, das von den β-Strahlen herrührende Bild in einen der Richtung des elektrischen Feldes parallelen geraden Strich ausgezogen; bei magnetischer Ablenkung ergibt sich ein zur magnetischen Feldrichtung senkrechter Strich. Die „Inhomogenität" der Strahlung macht es unmöglich, auf diese Weise die Ablenkung der einzelnen Strahlteilchen zu bestimmen. Es gelang indessen Kaufmann, gerade die Inhomogenität der Strahlung zur Lösung der Aufgabe zu benutzen, indem er gleichzeitig elektrisch und senkrecht dazu

magnetisch ablenkte. Bei dieser, der Kundtschen Methode der Dispersionsmessung durch gekreuzte Spektren entsprechenden Anordnung wurde auf der photographischen Platte eine Kurve erhalten; die Koordinaten eines jeden Punktes der Kurve zeigten direkt die elektrische bzw. die magnetische Ablenkung des betreffenden Strahlteilchen an. Indem Kaufmann die Strahlen zwischen den Platten eines Kondensators hindurchtreten ließ, welche nur um 1,2 mm voneinander entfernt und auf einer Potentialdifferenz von 2500—3000 Volt gehalten waren, indem er ferner parallel dem elektrischen Felde gleichzeitig ein magnetisches Feld erregte, erhielt er photographische Kurven, welche direkt die elektrische Ablenkung eines homogenen β-Strahles als Funktion der magnetischen Ablenkung darstellten. Dabei ist zwar, da es sich nicht um unendlich kleine Ablenkungen handelt, die elektrische Ablenkung nicht genau proportional dem in (121d) berechneten y zu setzen, und die magnetische Ablenkung nicht genau umgekehrt proportional dem in (119a) angegebenen Krümmungsradius R. Immerhin lassen sich den auf der photographischen Platte direkt beobachteten Ablenkungen zwei nur wenig von ihnen verschiedene Größen y' und z', die „reduzierte elektrische Ablenkung“ und die „reduzierte magnetische Ablenkung“ zuordnen, welche den in (122) und (122a) eingehenden Größen y und $\frac{1}{R}$ proportional sind; jene beiden von der Theorie geforderten Beziehungen lassen sich schreiben

$$\beta = k_1 \cdot \frac{z'}{y'}, \tag{122b}$$

$$\psi(\beta) = k_2 \cdot \frac{y'}{z'^2}. \tag{122c}$$

Die Konstanten k_1, k_2 hängen noch von den Abmessungen der Apparate, den Feldstärken, ferner von η_0 und c ab.

Die Prüfung der Theorie an der Hand der Beobachtungsergebnisse wurde so durchgeführt, daß zunächst versucht wurde, die gemessenen reduzierten Ablenkungen durch die Formel (117e) darzustellen, wobei die Kurvenkonstanten k_1 und k_2

nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet wurden. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Die ersten beiden Zeilen enthalten die gemessenen reduzierten Ablenkungen z' und y'. Die dritte Zeile gibt die auf Grund der Formeln (122b, c) berechneten Werte von y' an. Die Abweichung δ der beobachteten und der berechneten Werte von y' in Mikron sind in der vierten Zeile aufgeführt; sie gestatten ein Urteil über die Genauigkeit, mit welcher die theoretische Formel (117e) für die transversale Masse gültig ist. Der mittlere Fehler der Kurvenpunkte beträgt nur 5 Mikron. Die fünfte Zeile endlich enthält die Geschwindigkeitswerte β, bezogen auf Lichtgeschwindigkeit, welche sich den Ablenkungen auf Grund unserer Theorie zuordnen.

z'	y' beob.	y' ber.	δ	β
0,1350	0,0246	0,0251	− 5	0,974
0,1919	0,0376	0,0377	− 1	0,922
0,2400	0,0502	0,0502	0	0,867
0,2890	0,0645	0,0649	− 4	0,807
0,3359	0,0811	0,0811	0	0,752
0,3832	0,1001	0,0995	+ 6	0,697
0,4305	0,1205	0,1201	+ 4	0,649
0,4735	0,1405	0,1408	− 3	0,610
0,5252	0,1667	0,1682	−15	0,566

Ob die Theorie den Zusammenhang der Kurvenkonstanten k_1 und k_2 mit den Feldstärken richtig wiedergibt, versuchte Kaufmann durch Messung der Feldstärken festzustellen. Für den Quotienten aus elektrischer und magnetischer Feldstärke ergab sich eine Abweichung von nur 3,5 % zwischen dem aus den Kurvenkonstanten berechneten und dem gemessenen Werte.

Man kann ferner die Theorie prüfen, indem man den aus den Kurven extrapolierten Wert der spezifischen Ladung η_0 langsamer Elektronen mit dem für Kathodenstrahlen (§ 2) er-

haltenen vergleicht. Den ersteren Wert findet Kaufmann nach unserer Theorie gleich

(123) $$\eta_0 = 1{,}823 \cdot 10^7.$$

Der für Kathodenstrahlen angegebene Wert (9) ist konsequenter Weise ebenfalls, entsprechend den Andeutungen im Eingange dieses Paragraphen, zu korrigieren, da die Geschwindigkeit der Elektronen auch hier nicht als klein gegen die Lichtgeschwindigkeit zu betrachten ist. Dann erhält man

(123a) $$\eta_0 = 1{,}878 \cdot 10^7.$$

Die Übereinstimmung ist nicht unbefriedigend. Dem aus dem Zeeman-Effekt (§ 10) ermittelten Wert des η_0 (Gl. 61), nämlich

(123b) $$\eta_0 = 1{,}79 \cdot 10^7.$$

liegt der von Kaufmann auf Grund der Theorie des starren Elektrons aus der Ablenkung der β-Strahlen des Radiums berechnete Wert näher als der aus der Ablenkung der Kathodenstrahlen gefundene.

Bei seinen letzten Untersuchungen (1906) hat W. Kaufmann auch auf die Theorien von H. A. Lorentz[32]) und A. Bucherer[7]) Bezug genommen, von denen im nächsten Paragraphen die Rede sein wird.

Es wäre von Interesse, das Intervall zwischen den Kathodenstrahlen und den langsamsten Radiumstrahlen auszufüllen und auch in diesem Gebiete die Theorie zu prüfen; doch ist die künstliche Beschleunigung der Kathodenstrahlteilchen bis zur halben Lichtgeschwindigkeit mit großen experimentellen Schwierigkeiten verknüpft.

§ 22. Das Lorentzsche und das Buchererschen Elektron.

Gewisse später zu erörternde Fragen der Optik bewegter Körper haben H. A. Lorentz[32]) veranlaßt, der auf der kinematischen Grundhypothese (VII) fußenden Dynamik des Elektrons eine andere gegenüber zu stellen, welche diese Grundhypothese aufgibt. H. A. Lorentz behält nicht nur die allgemeinen Grundgleichungen (I bis V) bei, sondern auch die dynamische

Grundgleichung (VI), welche verlangt, daß die resultierenden elektromagnetischen Kräfte des äußeren und des vom Elektron selbst erregten Feldes einander im Sinne der Mechanik starrer Körper das Gleichgewicht halten. Er nimmt indessen das Elektron nicht als „starr" an, sondern läßt eine Formänderung desselben zu. Im Ruhezustande soll das Elektron eine Kugel vom Radius a sein; bei der Bewegung aber soll es sich parallel der Bewegungsrichtung im Verhältnis

$$\varkappa = \sqrt{1-\beta^2}$$

kontrahieren. Das gleichförmig translatorisch bewegte Elektron soll demnach ein Heaviside-Ellipsoid sein.

Wir wollen die Lagrangesche Funktion sowie die elektromagnetische Energie und Bewegungsgröße eines solchen Lorentzschen Elektrons berechnen. Das elektromagnetische Feld bestimmt sich aus den Ansätzen des § 18; die Anwendung der dort gegebenen Transformation (105) gestaltet sich hier besonders einfach. Das bewegte System Σ ist ein Heaviside-Ellipsoid; geht man durch Streckung parallel der Bewegungsrichtung im Verhältnis $\varkappa^{-1}$ zum ruhenden System Σ_0 über, so erhält man eine Kugel vom Radius a. Die Energie dieser Kugel ist, im Falle der Flächenladung,

$$U_0 = \int \frac{dv_0}{8\pi} \mathfrak{E}_0^2 = \frac{e^2}{2a}. \tag{124}$$

Die Lagrangesche Funktion, welche nach (104b) im Falle gleichförmiger Bewegung der Kräftefunktion entgegengesetzt gleich ist, wird, gemäß (106d),

$$L = -\varkappa U_0 = -\varkappa \frac{e^2}{2a}. \tag{124a}$$

Ferner folgt aus (102) und (106)

$$\Phi = \frac{1}{\varkappa} \varphi_0, \tag{124b}$$

und daher aus (101d) und (105)

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_y &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0} = \frac{1}{\varkappa}\mathfrak{E}_{0y}, \\ \mathfrak{E}_z &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \varphi_0}{\partial z_0} = \frac{1}{\varkappa}\mathfrak{E}_{0z}. \end{aligned} \right. \tag{124c}$$

Hieraus und aus (101f) bestimmt sich die x-Komponente des Vektors $\mathfrak{g}$, welcher die Dichte der elektromagnetischen Bewegungsgröße anzeigt:

$$\mathfrak{g}_x = \frac{1}{4\pi c}\left\{\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_y\right\} = \frac{\beta}{4\pi c}\left\{\mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2\right\} = \frac{\beta}{4\pi c\varkappa^2}\left\{\mathfrak{E}_{0y}^2 + \mathfrak{E}_{0z}^2\right\}.$$

Durch Integration über das Feld des Systemes Σ, dessen Volumelemente denen des ruhenden Systemes Σ_0 durch (105) zugeordnet und daher im Verhältnis

$$dv : dv_0 = \varkappa$$

verkleinert sind, folgt

(124d) $$\mathfrak{G}_x = \int dv\, \mathfrak{g}_x = \frac{\beta}{4\pi c\varkappa}\cdot\int dv_0\left\{\mathfrak{E}_{0y}^2 + \mathfrak{E}_{0z}^2\right\}.$$

Beachtet man ferner, daß in Σ_0 das Feld dasjenige einer ruhenden Kugel ist, daß mithin aus Symmetriegründen

$$\int dv_0\, \mathfrak{E}_{0x}^2 = \int dv_0\, \mathfrak{E}_{0y}^2 = \int dv_0\, \mathfrak{E}_{0z}^2$$

gilt, so erhält man

$$\int \frac{dv_0}{8\pi}\left\{\mathfrak{E}_{0y}^2 + \mathfrak{E}_{0z}^2\right\} = \frac{2}{3}\int \frac{dv_0}{8\pi}\,\mathfrak{E}_0^2 = \frac{2}{3}\,U_0.$$

Der Betrag des der Bewegungsrichtung des Heaviside-Ellipsoides parallelen Vektors $\mathfrak{G}$ wird demnach

(124e) $$|\mathfrak{G}| = \frac{4}{3}\frac{\beta}{c\varkappa}\,U_0 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2}\frac{|\mathfrak{v}|}{\varkappa}, \quad \left\{\varkappa = \sqrt{1-\beta^2}\right\}.$$

Aus der so bestimmten elektromagnetischen Bewegungsgröße folgt, auf Grund der allgemeinen Beziehung (103), die doppelte magnetische Energie

(124f) $$2T = \frac{2}{3}\frac{e^2\beta^2}{a\varkappa}.$$

Hieraus und aus (124a) erhält man, für die gesamte elektromagnetische Energie des Heaviside-Ellipsoides, den Ausdruck

(124g) $$W = 2T - L = \frac{e^2}{2a\varkappa}\left(1 + \frac{\beta^2}{3}\right).$$

H. A. Lorentz nimmt nun an, daß die träge Masse des Elektrons rein elektromagnetischer Art ist; demgemäß zieht er, neben der elektromagnetischen Bewegungsgröße (124e), eine materielle Bewegungsgröße nicht in Rechnung. Er erhält auf Grund der Formeln (115) und (115a), für die longitudinale und transversale Masse

$$m_s = m_0 \cdot \varkappa^{-3} = m_0 \cdot (1 - \beta^2)^{-\frac{3}{2}}, \tag{125}$$

$$m_r = m_0 \cdot \varkappa^{-1} = m_0 \cdot (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}; \tag{125a}$$

m_0 stellt dabei den gemeinsamen Grenzwert beider Massen bei langsamer Bewegung vor, der im Falle der Flächenladung durch (117b), im Falle der Volumladung durch (117c) gegeben wird. Nach dem in § 18 bewiesenen Satze geht der Wert von U_0 im Falle der Volumladung aus dem im Falle der Flächenladung gültigen Werte durch Multiplikation mit $^6/_5$ hervor; mit demselben Faktor sind demnach die Ausdrücke der Lagrangeschen Funktion (124a), der Bewegungsgröße (124e) und der elektromagnetischen Energie (124g) beim Übergang zur Volumladung zu multiplizieren.

Versucht man, die longitudinale elektromagnetische Masse des Lorentzschen Elektrons auf Grund der Formeln (115b) und (124g) zu berechnen, indem man annimmt, daß die Energie des Elektrons rein elektromagnetischer Natur ist, so gelangt man zu einem Ergebnis, welches zu (125) in Widerspruch steht. Das kann nicht wundernehmen; haben wir doch in § 19 gesehen, daß die Relation (111b), welche die Identität der aus der elektromagnetischen Energie und aus der elektromagnetischen Bewegungsgröße abgeleiteten Werte der Masse ausspricht, auf der Annahme einer unveränderlichen Ladungsverteilung beruht. Für das Lorentzsche Elektron, welches der Grundhypothese (VII) nicht gehorcht, gilt diese Relation ebensowenig wie die Gleichungen (111) und (111a), welche Impuls und Energie mit der Lagrangeschen Funktion verknüpfen. In der Tat, nach (124a) ist

$$\frac{dL}{d|\mathfrak{v}|} = \frac{e^2}{2a} \cdot \frac{\beta}{\varkappa c} = \frac{e^2}{2ac^2} \cdot \frac{|\mathfrak{v}|}{\varkappa} = \frac{3}{4} m_0 \cdot \frac{|\mathfrak{v}|}{\varkappa}, \tag{126}$$

während nach (124e) und (125a)

$$|\mathfrak{G}| = m_0 \cdot \frac{|\mathfrak{v}|}{\varkappa} = m_r \cdot |\mathfrak{v}|$$

ist.

Während für das „starre" Elektron die Differenz dieser beiden Größen verschwindet, hat sie für das deformierbare Elektron den von Null verschiedenen Wert

$$\frac{dL}{d|\mathfrak{v}|} - |\mathfrak{G}| = -\frac{1}{4} m_0 \cdot \frac{|\mathfrak{v}|}{\varkappa} = -\frac{1}{4} m_r \cdot |\mathfrak{v}|. \tag{126a}$$

Da nun allgemein gilt:

$$W = 2T - L = |\mathfrak{v}| \cdot |\mathfrak{G}| - L,$$

so folgt

$$\frac{1}{|\mathfrak{v}|}\frac{dW}{d|\mathfrak{v}|} = \frac{d|\mathfrak{G}|}{d|\mathfrak{v}|} + \frac{1}{|\mathfrak{v}|}\left\{|\mathfrak{G}| - \frac{dL}{d|\mathfrak{v}|}\right\}.$$

Hieraus ersieht man, daß (115) und (115b) nicht zu demselben Werte der longitudinalen Masse führen können. Bestimmt man die Masse durch die elektromagnetische Bewegungsgröße, so ist, für das Lorentzsche Elektron, (115b) zu ersetzen durch

$$\frac{1}{|\mathfrak{v}|}\frac{dW}{d|\mathfrak{v}|} = m_s + \frac{1}{4} m_r. \tag{126b}$$

Da die longitudinale Masse des Lorentzschen Elektrons sich nicht aus der elektromagnetischen Energie allein ableiten läßt, so müssen wir, um das Energieprinzip aufrechtzuerhalten, diesem Elektron eine innere Energie E nicht elektromagnetischer Art zuschreiben. In der Tat, es soll sich ja das Elektron bei einer Zunahme der Geschwindigkeit abplatten; dabei wird gegen die elektrodynamischen Kräfte, mit denen sich die Volumelemente abstoßen, Arbeit geleistet. Während für das starre Elektron die Zunahme der elektromagnetischen Energie gleich der von der äußeren Kraft $\mathfrak{K}^a$ geleisteten Arbeit ist, findet das hier nicht mehr statt. Die Zunahme der elektromagnetischen Energie bei einer Beschleunigung ist, für das Lorentzsche Elektron, größer als die Arbeit der äußeren Kräfte.

Die innere Energie E, durch deren Annahme man das Energieprinzip aufrechterhalten kann, darf nicht als kinetische Energie im Sinne der gewöhnlichen Mechanik betrachtet werden; denn in diesem Falle würde jede Berechtigung dafür wegfallen, daß Bewegungsgröße im Sinne der gewöhnlichen Mechanik nicht angenommen wird. Immerhin kann E von der Geschwindigkeit abhängen, da ja diese die Form des Elektrons bestimmt. Die Energiegleichung verlangt

$$\frac{d\{W+E\}}{dt} = (\mathfrak{v}\mathfrak{K}^a), \tag{127}$$

und der Impulssatz

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \mathfrak{K}^a. \tag{127a}$$

Durch Kombination dieser beiden Sätze erhält man

$$\frac{d\{W+E\}}{dt} = \left(\mathfrak{v}\frac{d\mathfrak{G}}{dt}\right),$$

oder

$$\left(\mathfrak{G}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left\{(\mathfrak{v}\mathfrak{G}) - W - E\right\}. \tag{127b}$$

Für gleichförmige Bewegung ist nun

$$(\mathfrak{v}\mathfrak{G}) - W = 2T - W = T - U = L.$$

Für quasistationäre Bewegungen wird diese Beziehung als gültig angesehen, und es wird L wie E als Funktion der jeweiligen Geschwindigkeit betrachtet. Es wird mithin

$$\frac{d\{L-E\}}{dt} = \frac{d\{L-E\}}{d|\mathfrak{v}|}\cdot\frac{d|\mathfrak{v}|}{dt}. \tag{127c}$$

Da ferner, bei stationärer und quasistationärer Bewegung, für das Lorentzsche Elektron aus Symmetriegründen der Impuls parallel der Bewegungsrichtung ist, so gilt

$$\left(\mathfrak{G}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right) = |\mathfrak{G}|\frac{d|\mathfrak{v}|}{dt}. \tag{127d}$$

Nach (127b) sollen nun die Ausdrücke (127c) und (127d) einander gleich sein, und zwar für beliebige Werte der Beschleunigung; hieraus folgt die Relation

$$|\mathfrak{G}| = \frac{d(L-E)}{d|\mathfrak{v}|}. \tag{128}$$

Dieselbe ist als Verallgemeinerung der Relation (111) anzusehen; sie geht in jene über, wenn man eine Energie E nicht elektromagnetischer Art ausschließt.

Hier tritt der bereits in § 16 erörterte Zusammenhang der kinematischen Grundgleichung (VII) mit dem Gedanken der rein elektromagnetischen Begründung der Dynamik des Elektrons deutlich hervor. Für das starre Elektron gilt (111) allgemein, es folgt daher aus (128)

$$\frac{dE}{d|\mathfrak{v}|} = 0,$$

d. h. eine etwa angenommene Energie nicht elektromagnetischer Art würde bei einer Änderung der Geschwindigkeit sich nicht ändern. Etwa angenommene innere Kräfte nicht elektromagnetischer Natur würden dabei keine Arbeit leisten. Unsere auf der Grundgleichung (VII) fußende Dynamik des Elektrons braucht daher solche Kräfte und eine solche Energie nicht einzuführen, eine „potentielle" Energie ebensowenig wie eine kinetische. Die Lorentzsche Dynamik des Elektrons sieht gleichfalls die träge Masse als rein elektromagnetisch an und schließt daher eine kinetische Energie im Sinne der gewöhnlichen Mechanik aus. Sie muß indessen eine „potentielle" innere Energie des Elektrons einführen. Aus (128), im Verein mit (126a) und (126), folgt:

$$\text{(128a)} \qquad \frac{dE}{d|\mathfrak{v}|} = -\frac{1}{4} m_0 \cdot \frac{|\mathfrak{v}|}{\varkappa} = -\frac{1}{3} \frac{dL}{d|\mathfrak{v}|},$$

und, durch Integration,

$$\text{(128b)} \qquad E = E_0 - \frac{1}{3}(L - L_0);$$

hier sind E_0, L_0 die Werte, welche E und L für das ruhende Elektron besitzen. Aus (124a) folgt

$$\text{(128c)} \qquad E = E_0 - \frac{e^2}{6a}(1 - \varkappa).$$

Diese Formel gibt an, wie die „potentielle" Energie des Lorentzschen Elektrons mit wachsender Geschwindigkeit abnimmt. Für Lichtgeschwindigkeit, wo das Elektron in eine Kreis-

scheibe übergeht, wird $\varkappa$ gleich Null, mithin die potentielle Energie

$$E_1 = E_0 - \frac{e^2}{6a}. \tag{128d}$$

Wir können daher (128c) auch schreiben

$$E = E_1 + \frac{e^2\varkappa}{6a}. \tag{129}$$

Diese potentielle Energie nicht elektromagnetischer Art muß man dem Lorentzschen Elektron zuschreiben, wenn man das Energieprinzip aufrechtzuerhalten wünscht.

Bei diesem Ergebnis wird man sich kaum beruhigen; man wird vielmehr weiter fragen, nach welchem Gesetz die Kräfte wirken sollen, die sich aus einer solchen potentiellen Energie herleiten. Nur indem man hierüber bestimmte Annahmen macht, wird man über das Verhalten des Lorentzschen Elektrons bei allgemeineren Bewegungen (nicht quasistationären oder nicht rein translatorischen) etwas Bestimmtes aussagen können. Man kann daran denken, elastische Kräfte zwischen den benachbarten Volumelementen des Elektrons anzunehmen, und eine Theorie des deformierbaren Elektrons von der in § 16 angedeuteten Art zu entwickeln. Eine solche Theorie würde die Trägheit des Elektrons erklären, aber nicht rein elektromagnetisch; sie würde die kinetische Energie zurückführen auf die weniger gut verstandene potentielle Energie und auf die elektromagnetische Energie. Auf einer solchen Dynamik des Elektrons läßt sich kein elektromagnetisches System der Physik aufbauen. Wenn man in die Dynamik des Elektrons elastische Kräfte einführt, so ist es logisch unmöglich, die Elastizität der Materie durch Zurückführung auf die Mechanik der Elektronen rein elektromagnetisch zu deuten.

Was den Vergleich der Lorentzschen Formel (125a) für die transversale Masse mit den Beobachtungen an Becquerelstrahlen anbelangt, so findet Kaufmann[23]) bei seinen letzten Untersuchungen (1906), daß seine Kurven sich auch durch diese Formel darstellen lassen, mit einem mittleren Fehler von

nur 5 Mikron; doch weichen die gemessenen Feldstärken von den aus den Kurvenkonstanten berechneten um 10,4 % ab, und es beträgt der nach Lorentz extrapolierte Wert der spezifischen Ladung langsamer Elektronen

$$\eta_0 = 1{,}660 \cdot 10^7;$$

derselbe ist wesentlich kleiner als der bei Kathodenstrahlen (123a) gefundene und der aus dem Zeeman-Effekt ermittelte (123b). So gelangt Kaufmann zu dem Ergebnisse, daß sich die Lorentzsche Dynamik des bei der Bewegung sich abplattenden Elektrons nicht mit dem experimentellen Befunde vereinbaren läßt.

Das Lorentzsche Elektron ist ein spezielles Heaviside-Ellipsoid, mit den Halbachsen $a\varkappa$, a, a

$$\left\{\varkappa = \sqrt{1-\beta^2}\right\},$$

wo a von β unabhängig ist.

Es liegt nahe, ein allgemeineres Heaviside-Ellipsoid zu betrachten, indem man a als Funktion von β auffaßt; auch für ein solches sind durch (124a, e, g) Lagrangesche Funktion, Impuls und Energie gegeben:

$$L = -\varkappa \frac{e^2}{2a}, \quad |\mathfrak{G}| = \frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2}\frac{|\mathfrak{v}|}{\varkappa}, \quad W = \frac{e^2}{2a\varkappa}\left(1+\frac{1}{3}\beta^2\right).$$

Man kann nun folgende Frage aufwerfen: Ist es möglich, a als Funktion der Geschwindigkeit so zu bestimmen, daß die Beziehung gilt

$$|\mathfrak{G}| = \frac{dL}{d|\mathfrak{v}|},$$

daß mithin aus Impuls und Energie der gleiche Wert der longitudinalen Masse folgt:

$$m_s = \frac{d|\mathfrak{G}|}{d|\mathfrak{v}|} = \frac{1}{|\mathfrak{v}|}\frac{dW}{d|\mathfrak{v}|},$$

ohne daß man wie beim Lorentzschen Elektron eine Energieform nicht elektromagnetischer Art heranzuziehen hat?

Indem wir den Betrag des elektromagnetischen Impulses dem Differentialquotienten der Lagrangeschen Funktion noch der Geschwindigkeit gleichsetzen, erhalten wir

$$\frac{1}{a}\frac{da}{d\beta} = \frac{1}{3}\frac{\beta}{\varkappa^2} = -\frac{1}{3\varkappa}\frac{d\varkappa}{d\beta},$$

mithin

(130) $$a = a_0 \varkappa^{-\frac{1}{3}},$$

wo a_0 den Radius des Elektrons im Falle der Ruhe darstellt. Bei Bewegung sind die Halbachsen des Heaviside-Ellipsoides:

$$a_0 \varkappa^{\frac{2}{3}}, \quad a_0 \varkappa^{-\frac{1}{3}}, \quad a_0 \varkappa^{-\frac{1}{3}}.$$

Es bleibt das Volumen des Ellipsoides konstant. Wir sehen also: Das Heaviside-Ellipsoid von konstantem Volumen ist das einzige, bei dem die Arbeit der äußeren translatorischen Kräfte dem Zuwachs der elektromagnetischen Energie gleich ist.

Man kann diese Folgerung prüfen, indem man sich davon überzeugt, daß aus Impuls und Energie:

(130a) $$|\mathfrak{G}| = \frac{2}{3}\frac{e^2}{a_0 c^2} \cdot |\mathfrak{v}| \cdot \varkappa^{-\frac{2}{3}},$$

(130b) $$W = \frac{e^2}{2a_0}\left(1 + \frac{1}{3}\beta^2\right) \cdot \varkappa^{-\frac{2}{3}}$$

der gleiche Wert der longitudinalen Masse folgt:

(130c) $$m_s = \frac{d|\mathfrak{G}|}{d|\mathfrak{v}|} = \frac{1}{|\mathfrak{v}|}\frac{dW}{d|\mathfrak{v}|} = m_0 \varkappa^{-\frac{8}{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\beta^2\right).$$

Für die transversale Masse erhält man

(130d) $$m_r = m_0 \varkappa^{-\frac{2}{3}} = m_0 (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{3}}.$$

Ein solches Heaviside-Ellipsoid konstanten Volumens ist von A. Bucherer[7]) zuerst behandelt worden. Die Formel (130d) hat Kaufmann[28]) bei seinen letzten Untersuchungen (1906) ebenfalls geprüft und gefunden, daß sie die Ablenkbarkeit der β-Strahlen des Radiums ebensogut darstellt wie unsere Formel (117a). Die beiden Formeln stimmen überhaupt in dem hier in Frage kommenden Geschwindigkeitsintervall bis auf 2% überein.

Versucht man, sich die Bedingung konstanten Volumens kinematisch verständlich zu machen, so findet man Schwierig-

keiten. Am nächsten liegt es wohl, Volumladung anzunehmen und die Kinematik der dieses Volumen erfüllenden Elektrizität derjenigen inkompressibler Flüssigkeiten nachzubilden. Doch zeigt es sich, daß dann bei Bewegung im magnetischen Felde Wirbel entstehen, die bei fehlender materieller Masse ins Unendliche wachsen könnten. Auch dürfte es kaum gelingen zu beweisen, daß unter diesen Annahmen bei veränderlicher Geschwindigkeit das Elektron jeweils die Gestalt des Heaviside-Ellipsoides annimmt. Es sind das Schwierigkeiten, welche das starre Elektron vermeidet.

Was die Beziehung zum Relativitätspostulat anbelangt, von der weiter unten die Rede sein wird, so befinden sich sowohl das starre kugelförmige Elektron wie das Heaviside-Ellipsoid konstanten Volumens im Widerspruche mit diesem Prinzipe, dem nur das Lorentzsche Elektron genügt.

§ 23. Der Bereich der quasistationären Bewegung.

Im ersten Bande dieses Werkes wurde gegen die Theorie des quasistationären Stromes der Einwand gemacht, daß diese Theorie von dem Energieverlust durch Strahlung keine Rechenschaft gibt. Derselbe Einwand ist gegen die in den vorangegangenen Paragraphen dargelegte Theorie der quasistationären Elektronenbewegung zu erheben. Diese Theorie bestimmt die Energie und den Impuls des vom Elektron erregten Feldes so, als ob sie der jeweiligen Geschwindigkeit des Elektrons entsprächen. Bei periodischen Bewegungen führt diese Behandlungsweise zu der Konsequenz, daß nach dem Ablauf einer Periode die Energie und die Bewegungsgröße des Feldes zu den Anfangswerten zurückgekehrt seien, daß also das Wegintegral und das Zeitintegral der äußeren Kraft für eine ganze Schwingung gleich Null sei. Das ist nun, wie im zweiten Kapitel dieses Bandes dargelegt wurde, keineswegs der Fall; auch bei periodischen Bewegungen ist das Wegintegral und im allgemeinen auch das Zeitintegral der äußeren Kraft von Null verschieden. Die Arbeitsleistung und der Impuls der äußeren Kraft findet sich in der Energie und der Bewegungs-

größe der entsandten Wellen wieder. Die entsandte Wellenstrahlung ist es eben, die man vernachlässigt, wenn man die beschleunigte Bewegung des Elektrons als quasistationär betrachtet.

Die Entwickelungen des vorigen Kapitels gestatten es uns, diese Lücke unserer Theorie sogleich auszufüllen. Haben wir doch in Gleichung (87) des § 15 den allgemeinen Ausdruck für die Rückwirkung der Strahlung angegeben. Wir setzen jetzt für die gesamte vom Elektron auf sich selbst ausgeübte Kraft

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}' + \mathfrak{K}'', \tag{131}$$

indem wir unter

$$\mathfrak{K}' = -\frac{d\mathfrak{G}}{dt} \tag{131a}$$

die nach den Ansätzen der vorigen Paragraphen berechnete Kraft verstehen, unter

$$\mathfrak{K}'' = \mathfrak{K}^s \tag{131b}$$

aber die in (87) angegebene Reaktionskraft der Strahlung. Dabei ist zu bemerken, daß $\mathfrak{G}$, der Impuls des vom Elektron mitgeführten Feldes, von den über die Form des Elektrons gemachten Annahmen abhängt, während die Rückwirkung der Strahlung sich ohne solche Annahmen angeben ließ, wenigstens dann, wenn es gestattet war, das Elektron hinsichtlich der entsandten Wellenstrahlung als einer Punktladung äquivalent zu betrachten. Alsdann erfüllt der Ansatz (131) für die innere Kraft allgemein die Energiegleichung und die Impulsgleichung; denn die Arbeitsleistung der Zusatzkraft $\mathfrak{K}^s$ ist, wie aus den Entwickelungen des § 15 hervorgeht, für ein Intervall beschleunigter Bewegung entgegengesetzt gleich der in diesem Intervalle ausgestrahlten Energie, das Zeitintegral von $\mathfrak{K}^s$ entgegengesetzt gleich der ausgestrahlten Bewegungsgröße. Bestimmen wir die Bewegung des Elektrons aus der korrigierten Bewegungsgleichung

$$\mathfrak{K}^a = -\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} - \mathfrak{K}^s, \tag{131c}$$

so sind wir von vornherein sicher, in keinen Widerspruch mit dem Energieprinzip oder dem Impulssatze zu geraten. Wir fassen eine Bewegung ins Auge, die zuerst gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ verläuft, dann in beliebiger Weise beschleunigt wird und weiterhin wieder stationär mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_2$ vor sich geht. Wir warten so lange, bis die entsandten Wellen sich hinreichend weit von dem (mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegten) Elektron entfernt haben. Innerhalb des von der Wellenzone eingerahmten Raumes besteht dann das Feld, welches der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_2$ entspricht, und dessen Energie und Impuls W_2 bzw. $\mathfrak{G}_2$ sind. Die Energie und die Bewegungsgröße des außerhalb der Wellenzone liegenden Feldes kommen nicht in Betracht. Werden für die Energie W_{12} und den Impuls $\mathfrak{G}_{12}$ der Wellenzone die im vorigen Kapitel gefundenen Werte eingesetzt, so gilt allgemein

$$\int_1^2 \mathfrak{K}^a dt = \mathfrak{G}_2 - \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_{12}, \tag{131d}$$

$$\int_1^2 (\mathfrak{v}\mathfrak{K}^a) dt = W_2 - W_1 + W_{12}, \tag{131e}$$

wenigstens für das starre kugelförmige sowie auch für das Buchenersche Elektron. Beim Lorentzschen Elektron ist, wie wir soeben gesehen haben, noch die Änderung der „inneren potentiellen Energie“ in Rechnung zu setzen.

Wir sind jetzt in der Lage, den Gültigkeitsbereich der quasistationären Bewegung anzugeben: Wir dürfen die Bewegung als quasistationäre behandeln, wenn gegen die so berechnete innere Kraft $\mathfrak{K}'$ die Reaktionskraft $\mathfrak{K}''$ der Strahlung verschwindet.

Betrachten wir etwa eine Kreisbewegung, wie sie die Elektronen der Radium-Strahlung in einem zur ursprünglichen Strahlrichtung senkrechten magnetischen Felde ausführen. Hier ist der Betrag der Trägheitskraft der quasistationären Bewegung für das starre kugelförmige Elektron nach (117e)

$$|\mathfrak{K}'| = m_r \frac{|\mathfrak{v}|^2}{R} = m_0 \frac{3}{4} \frac{|\mathfrak{v}|^2}{R} \psi(\beta). \tag{132}$$

Die Reaktionskraft der Strahlung aber ist nach Gleichung (88)

$$\mathfrak{K}' = -\mathfrak{v} \cdot \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{\mathfrak{v}^2}{\varkappa^4 R^2},$$

so daß man erhält

$$(132\text{a}) \qquad |\mathfrak{K}''| = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{|\mathfrak{v}|^3}{\varkappa^4 R^2}, \qquad \varkappa^2 = 1 - \beta^2.$$

Setzt man für m_0 den im Falle der Flächenladung gültigen Wert (117b), so folgt

$$(132\text{b}) \qquad |\mathfrak{K}''| : |\mathfrak{K}'| = \frac{4}{3}\frac{a}{R} \cdot \frac{\beta}{\varkappa^4 \psi(\beta)}.$$

Für Bewegungen, die der Lichtgeschwindigkeit nicht gar zu nahe kommen, ist die eingehende Funktion von β keine große Zahl. Hier verschwindet der Betrag von $\mathfrak{K}''$ gegen den von $\mathfrak{K}'$, falls der Krümmungsradius R der Bahn groß gegen den Radius des Elektrons ist; diese Bedingung ist praktisch stets erfüllt. Wir sehen also: Die Ablenkbarkeit der in den Kathodenstrahlen und in den β-Strahlen des Radiums bewegten Elektronen darf in allen praktischen Fällen auf Grund der Ansätze der Theorie der quasistationären Bewegung berechnet werden.

Um zu zeigen, daß dieses auch für die raschesten der Elektronen gilt, deren Ablenkung man hat beobachten können, nehmen wir eine Geschwindigkeit an, die nur um 1 % kleiner ist, als die Lichtgeschwindigkeit:

$$\beta = 0{,}99; \quad 1 - \beta = 0{,}01;$$

wir erhalten dann

$$\varkappa^4 = (1 - \beta^2)^2 = 4 \cdot 10^{-4}, \quad \psi(\beta) = 4{,}3.$$

Man sieht, daß die Funktion von β, welche das Ansteigen des Quotienten $|\mathfrak{K}''| : |\mathfrak{K}'|$ bei Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit bedingt, hier bereits von Bedeutung wird; ihr Wert ist hier

$$\frac{4}{3}\frac{\beta}{\varkappa^4 \psi(\beta)} = 7{,}7 \cdot 10^2.$$

Dafür ist aber der Radius des Elektrons sehr klein gegen den Krümmungsradius der Bahn. Letzterer berechnet sich aus der reduzierten magnetischen Ablenkung

$$z' = 0{,}1495$$

und der von Kaufmann angegebenen Beziehung*)

$$z' = \frac{4{,}176}{R} \quad \text{zu} \quad R = 28 \text{ cm}.$$

Setzt man endlich für a den unter Annahme von Flächenladung berechneten Wert (Gl. 118) ein, so findet sich

$$|\mathfrak{K}''| : |\mathfrak{K}'| = \frac{7{,}7 \cdot 10^2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-13}}{28} = 3 \cdot 10^{-12}.$$

Die magnetische Feldstärke war hier gleich 200 absoluten Einheiten. Nimmt man nun auch ein 300 mal stärkeres magnetisches Feld an, so beträgt der bei Annahme quasistationärer Bewegung begangene relative Fehler immer noch weniger als 10^{-9}. Auch die Bewegung der raschesten beobachtbaren β-Strahlteilchen in experimentell herstellbaren magnetischen Feldern ist demnach als quasistationär zu betrachten.

Übrigens ist der Ausdruck für die Reaktionskraft der Strahlung, welcher in § 15 angegeben wurde, nicht streng gültig; er gilt nur angenähert, und zwar dann, wenn es gestattet ist, das Elektron bei der Berechnung der entsandten Wellen einer Punktladung äquivalent zu setzen. Die Bedingung (63b), unter der dieses gestattet war, lautet

$$\frac{|\dot{\mathfrak{v}}|\, 2a}{c^2(1-\beta)} \text{ klein gegen } 1.$$

Für rein transversale Beschleunigung ergibt dies

$$(132\text{c}) \qquad \frac{2a}{R} \frac{\beta^2}{1-\beta} \text{ klein gegen } 1.$$

Unter Berücksichtigung der obigen Zahlwerte erhalten wir für diesen Bruch den Wert

$$\frac{2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-13}}{28 \cdot 10^{-2}} = 10^{-12} \text{ ca.}$$

---

*) W. Kaufmann, l. c. Gött. Nachr. 1903, Gl. 6, S. 95.

Einen so geringen Fehler begeht man, wenn man für die raschesten der von Kaufmann beobachteten Elektronen die infolge der transversalen Beschleunigung stattfindende Strahlung und deren Rückwirkung aus den Ansätzen des vorigen Kapitels berechnet; diese Rückwirkung verschwindet wiederum gegen die Trägheitskraft des mitgeführten Feldes.

Je mehr man sich indessen der Lichtgeschwindigkeit nähert, desto größer werden die Zahlwerte der Brüche (132b, c); denn dieselben enthalten im Nenner $(1-\beta)^2$ bzw. $(1-\beta)$. Allerdings wird, wenn man durch eine gegebene äußere Kraft ablenkt, die Bahnkrümmung $1:R$ umgekehrt proportional zu $\psi(\beta)$ bei Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit abnehmen; aber $\psi(\beta)$ wird für $\beta=1$ nur logarithmisch unendlich, so daß dieser Umstand nicht so wesentlich ist. Man wird also bei weiterer Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit zu einem Punkte kommen, wo die Reaktionskraft der Strahlung nicht mehr gegen die Trägheitskraft des mitgeführten Feldes verschwindet, und wo es auch nicht mehr gestattet ist, die Reaktionskraft so zu berechnen, als ob das Elektron punktförmig wäre.

Jene beiden Kräfte sind im Grunde nichts anderes als die beiden ersten Terme einer Reihenentwickelung

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}' + \mathfrak{K}'' + \mathfrak{K}''' + \cdots, \tag{133}$$

die nach aufsteigenden Potenzen des Radius a des Elektrons fortschreitet. Der erste Term, die elektromagnetische Trägheitskraft, enthält a im Nenner; der zweite enthält a überhaupt nicht, wie er ja von den speziellen, über Form und Ladungsverteilung gemachten Annahmen unabhängig ist. Der dritte Term wird wieder von der Form und Ladungsverteilung abhängen und für unser kugelförmiges Elektron a im Zähler enthalten. Da die innere Kraft $\mathfrak{K}$ durch die Geschwindigkeit und durch die Beschleunigung bestimmt ist, welche in einem endlichen, dem betreffenden Zeitpunkte vorangegangenen Intervalle geherrscht haben (vgl. § 17), so ist eine solche Reihenentwickelung immer dann möglich, wenn die Bewegung stetig und ihre Geschwindigkeit kleiner als die Lichtgeschwindig-

keit ist. Je weiter man die Reihenentwickelung führt, desto höhere Differentialquotienten von $\mathfrak{v}$ und desto höhere Potenzen dieser Differentialquotienten werden zu berücksichtigen sein. Die Reihe wird um so schlechter konvergieren, je mehr sich die Bewegung einer unstetigen und die Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit nähert. Im Falle des oben durchgerechneten Beispieles konvergiert die Reihe noch außerordentlich gut. Für unstetige Bewegungen und für Bewegungen mit Lichtgeschwindigkeit oder gar Überlichtgeschwindigkeit versagt sie völlig. Hier müssen zur Berechnung der inneren Kraft die in den folgenden Paragraphen darzulegenden Methoden herangezogen werden.

Die in den Differentialquotienten von $\mathfrak{v}$ linearen Glieder der Reihenentwickelung (133) sind für den Fall der Volumladung von G. Herglotz[17]) allgemein berechnet worden. Es ergibt sich die Möglichkeit kleiner, gedämpfter Eigenschwingungen des Elektrons auch bei Abwesenheit quasielastischer Kräfte. Die Wellenlänge der langsamsten Eigenschwingung ist von der Größenordnung des Durchmessers des Elektrons, so daß eine elektromagnetische Erklärung der Spektrallinien hieraus nicht zu gewinnen ist.

§ 24. Das Feld eines beliebig bewegten Elektrons.

Während wir bisher bei der Integration der Feldgleichungen uns auf gewisse Spezialfälle beschränkt hatten, nämlich auf den Fall der gleichförmigen Bewegung beliebiger Ladungen und auf den Fall beliebiger Bewegung einer Punktladung, wollen wir jetzt dazu übergehen, das Feld eines beliebig bewegten Elektrons unter Berücksichtigung der räumlichen Ausdehnung des Elektrons zu bestimmen. Die allgemeinen Formeln, durch die wir in § 8 die elektromagnetischen Potentiale darstellten, werden uns zur Lösung dieser Aufgabe führen. Die Formeln (51) und (51a) daselbst lauten

$$d\Phi = \lambda d\lambda \int d\omega \varrho(\lambda, l-\lambda), \tag{134}$$

$$d\mathfrak{A} = \lambda d\lambda \int d\omega \mathfrak{k}(\lambda, l-\lambda). \tag{134a}$$

Diese Formeln sind noch von jeder Voraussetzung über die Form und die Ladungsverteilung des Elektrons unabhängig. Wir wenden sie an auf unser kugelförmiges Elektron vom Radius a mit gleichförmig verteilter Flächenladung oder Volumladung.

A. Flächenladung.

Wir verstehen unter R die Entfernung des betreffenden Aufpunktes P von dem Mittelpunkte M des Elektrons in irgendeiner früheren Lage des letzteren; $t = \frac{l}{c}$ ist die Zeit, zu der das Feld im Aufpunkte bestimmt werden soll, $\tau = \frac{\lambda}{c}$ die Latenszeit. Ist die translatorische Bewegung des Elektrons gegeben, so ist R als Funktion von $\lambda = c\tau$ bekannt. Das Elektron wird nun in seiner zur Zeit $t - \tau = \frac{l - \lambda}{c}$ eingenommenen Lage zum Felde im Aufpunkte nur dann etwas beisteuern können, wenn die um den Aufpunkt mit dem Radius λ geschlagene Kugel es schneidet. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn aus den drei Strecken R, λ und a ein Dreieck gebildet werden kann. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so gibt es keinen Punkt des Elektrons, von dem aus ein Beitrag, zur Zeit $t - \frac{\lambda}{c}$ entsandt, nach Durchlaufung des Latensweges λ im Aufpunkte zur Zeit t eintrifft. Diese Bedingung

(135) Aus R, λ, a ist Dreiecksbildung möglich

ergibt für einen äußeren Punkt die Ungleichung

$$R - a \leqq \lambda \leqq R + a, \tag{135a}$$

für einen inneren Punkt hingegen

$$a - R \leqq \lambda \leqq a + R. \tag{135b}$$

Dabei ist im Auge zu behalten, daß es sich um einen im Raume festen Aufpunkt handelt, dagegen um ein bewegtes Elektron; es kann daher für die Bestimmung des Feldes zur Zeit t ein und derselbe Aufpunkt bald als äußerer, bald als innerer Punkt gelten, je nach der früheren Lage des Elektrons, welche der betreffenden Latenszeit zuzuordnen ist.

Wir betrachten jetzt das Dreieck aus den Strecken R, λ, a (Abb. 3). Es gilt

$$2aR\cos\vartheta = R^2 + a^2 - \lambda^2. \tag{135c}$$

Schreitet man längs der Oberfläche des Elektrons fort, so ändern sich ϑ und λ, während a und R konstant bleiben. Man hat demnach

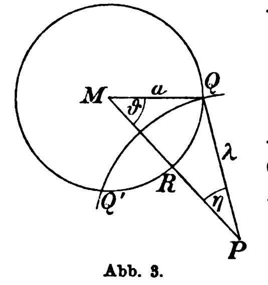


Abb. 3.

$$aR\sin\vartheta\, d\vartheta = \lambda\, d\lambda\,.$$

Zwei mit den Radien λ und $\lambda + d\lambda$ um P geschlagene Kugeln schneiden aus der Oberfläche des Elektrons einen Streifen aus von dem Flächeninhalte

$$2\pi a^2 \sin\vartheta\, d\vartheta = 2\pi \frac{a}{R} \cdot \lambda\, d\lambda\,.$$

Da die Elektrizität mit der Dichte $\frac{e}{4\pi a^2}$ über die Oberfläche verteilt ist, so befindet sich auf jenem Streifen die Elektrizitätsmenge

$$\frac{e}{2aR} \cdot \lambda\, d\lambda\,.$$

Diese Elektrizitätsmenge, die von den beiden benachbarten Kugeln λ, $\lambda + d\lambda$ eingeschlossen wird, drückt sich in der Schreibweise der Formel (134) aus durch

$$\lambda^2 d\lambda \int d\omega\, \varrho(\lambda, l - \lambda)\,.$$

Jene Formel besagt, daß der Beitrag zum skalaren Potentiale erhalten wird, indem man durch λ dividiert. Der Beitrag wird daher

$$d\Phi = \frac{e}{2a} \cdot \frac{d\lambda}{R}\,. \tag{136}$$

Um für eine gegebene Bewegung des Elektrons das skalare Potential im Aufpunkte zu bestimmen, ist nur eine einmalige Integration nach dem Latenswege λ auszuführen; dabei ist für jeden Aufpunkt R als Funktion von λ zu betrachten, und es ist die Integration zwischen den durch (135a, b) bestimmten Grenzen zu nehmen.

Wie die jeweilige Ladungsverteilung, so ist auch der Beitrag zum skalaren elektromagnetischen Potential für das allseitig symmetrische Elektron von der Rotationsbewegung unabhängig. Was jedoch das elektromagnetische Vektorpotential anbelangt, so sind die Beiträge der elektrizitätserfüllten Volumelemente hier, statt durch ϱ, durch

$$\mathfrak{k} = \varrho \frac{\mathfrak{v}}{c} = \frac{\varrho}{c} \left\{ \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\mathfrak{r}] \right\}$$

bestimmt, gemäß unserer kinematischen Grundgleichung (VII). Dementsprechend geht der Translationsbestandteil $\mathfrak{A}_1$ des Vektorpotentiales aus dem skalaren Potentiale hervor, indem die Beiträge aller Volumelemente mit dem gleichen Faktor $\frac{\mathfrak{v}_0}{c}$ multipliziert werden; dabei ist natürlich unter $\mathfrak{v}_0$ die Geschwindigkeit zur Zeit $t - \frac{\lambda}{c}$ zu verstehen. Wir erhalten demnach als Beitrag des von den Kugeln λ, $\lambda + d\lambda$ aus dem Elektron herausgeschnittenen Streifens zum Translationsbestandteil des Vektorpotentiales

$$d\mathfrak{A}_1 = \frac{e}{2ac} \cdot \frac{d\lambda\,\mathfrak{v}_0}{R}. \tag{136a}$$

Die Bestimmung des Rotationsbestandteiles des Vektorpotentiales ist nicht ganz so einfach. Man hat zu berücksichtigen, daß der Vektor $[\mathfrak{u}\mathfrak{r}]$, der hier an die Stelle von $\mathfrak{v}_0$ tritt, für die verschiedenen Punkte des Streifens ein verschiedener ist; denn es ist zwar $\mathfrak{u}$, der Vektor der jeweiligen Drehgeschwindigkeit, bei der Integration über den Streifen als fester Vektor zu betrachten, nicht aber $\mathfrak{r}$, der vom Mittelpunkte nach dem betreffenden Punkte der Oberfläche gezogene Radiusvektor. Letzterer kann geschrieben werden

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{R} \cdot \frac{a\cos\vartheta}{R} + \mathfrak{t}_1 \cdot a\sin\vartheta,$$

wobei unter $\mathfrak{R}$ der vom Mittelpunkte M des Elektrons nach dem Aufpunkte P gezogene Fahrstuhl, unter $\mathfrak{t}_1$ aber ein zu $\mathfrak{R}$ senkrechter Einheitsvektor zu verstehen ist. Es folgt

$$[\mathfrak{u}\mathfrak{r}] = [\mathfrak{u}\mathfrak{R}] \cdot \frac{a\cos\vartheta}{R} + [\mathfrak{u}\mathfrak{t}_1] \cdot a\sin\vartheta.$$

Bei der Integration über den Streifen ist nun der erste Term als konstant zu betrachten; der zweite Term aber fällt bei der Integration heraus, denn es hat für je zwei Punkte Q und Q' des Streifens, die in derselben durch $\mathfrak{R}$ gelegten Ebene sich befinden (vgl. Abb. 3), $\mathfrak{t}_1$ und daher auch $[\mathfrak{u}\mathfrak{t}_1]$ die entgegengesetzte Richtung. Es geht demnach der Rotationsbestandteil des Vektorpotentiales aus dem Translationsbestandteil (136a) dadurch hervor, daß

$$\left[\mathfrak{u}\mathfrak{R}\right]\frac{a\cos\vartheta}{R}$$

an Stelle von $\mathfrak{v}_0$ tritt. Es wird mit Rücksicht auf (135c)

$$d\mathfrak{A}_2 = \frac{e}{2ac}\cdot\frac{d\lambda}{R}\left[\mathfrak{u}\mathfrak{R}\right]\left\{\frac{R^2+a^2-\lambda^2}{2R^2}\right\} \tag{136b}$$

der Beitrag zum Rotationsbestandteile des Vektorpotentiales. Um die Integration nach dem Latenswege λ auszuführen, müssen natürlich die Vektoren $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{u}$ in ihrer Abhängigkeit von λ gegeben sein. Bei der Integration sind nur solche Werte von λ in Betracht zu ziehen, welche der Bedingung (135) genügen.

B. Volumladung.

Hier sind drei Fälle zu unterscheiden. a) Punkt im Innern. Dreiecksbildung aus R, λ, a unmöglich.

$$0 \leqq \lambda \leqq a - R.$$

Die Kugel λ liegt in diesem Falle ganz im Innern des Elektrons. Von zwei benachbarten Kugeln λ und $\lambda + d\lambda$ um P wird die Ladung eingeschlossen

$$4\pi\varrho\lambda^2 d\lambda = \frac{3e}{a^3}\lambda^2 d\lambda.$$

Die Division durch λ ergibt als Beitrag zum skalaren Potentiale

$$d\Phi = \frac{3e}{a^3}\lambda d\lambda. \tag{137}$$

Durch Multiplikation mit $\frac{\mathfrak{v}_0}{c}$ entsteht der Beitrag zum Translationsbestandteile des Vektorpotentiales

(137a) $$d\mathfrak{A}_1 = \frac{3e}{ca^3}\lambda d\lambda \mathfrak{v}_0 .$$

Der Beitrag zum Rotationsbestandteile des Vektorpotentiales ist

$$d\mathfrak{A}_2 = \frac{\lambda d\lambda}{c} \cdot \varrho \int d\omega [\mathfrak{u}\mathfrak{r}] .$$

$\mathfrak{r}$, der vom Mittelpunkte M des Elektrons nach der Oberfläche der Kugel λ gezogene Fahrstrahl, kann in zwei Vektoren

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{R} + \mathfrak{a}$$

zerlegt werden, wo $\mathfrak{R}$, der Vektor MP, vom Mittelpunkte des Elektrons nach dem Mittelpunkte der Kugel λ weist, $\mathfrak{a}$ aber vom Mittelpunkte der Kugel λ nach dem betreffenden Punkte der Oberfläche. Bei der Integration über die Oberfläche fällt der von $\mathfrak{a}$ herrührende Anteil von $[\mathfrak{u}\mathfrak{r}]$ fort, weil für zwei einander diametral gegenüberliegende Punkte der Kugel $\mathfrak{a}$ und mithin auch $[\mathfrak{u}\mathfrak{a}]$ den entgegengesetzten Wert hat. $\mathfrak{R}$ aber ist, ebenso wie $\mathfrak{u}$, bei der Integration über die Kugel konstant zu halten. Es folgt

(137b) $$d\mathfrak{A}_2 = \frac{3e}{ca^3}\lambda d\lambda \cdot [\mathfrak{u}\mathfrak{R}]$$

als Beitrag zum Rotationsbestandteil des Vektorpotentiales.

b) Punkt außerhalb oder innerhalb des Elektrons. Dreiecksbildung aus R, λ, a möglich. Alsdann gilt

$$| R - a | \leqq \lambda \leqq R + a .$$

Das ist der Fall, der bei Flächenladung ausschließlich in Betracht kam, und auf den Abb. 3 sich bezieht. Es gilt

$$d\Phi = \lambda d\lambda \varrho \omega .$$

Dabei ist

$$\omega = 2\pi(1 - \cos\eta)$$

der körperliche Winkel, unter dem das im Innern des Elektrons gelegene Segment (QQ') der Kugel λ vom Mittelpunkte P derselben gesehen wird. Es folgt aus dem Dreieck der Abb. 3

$$2R\lambda\cos\eta = R^2 + \lambda^2 - a^2,$$

daher

$$\omega = 2\pi \cdot \frac{a^2 - (R-\lambda)^2}{2R\lambda}$$

und

$$d\Phi = \frac{3e}{4a^3}d\lambda \cdot \left\{\frac{a^2-(R-\lambda)^2}{R}\right\}. \tag{138}$$

Dementsprechend wird

$$d\mathfrak{A}_1 = \frac{3e}{4a^3c}d\lambda \cdot \left\{\frac{a^2-(R-\lambda)^2}{R}\right\} \cdot \mathfrak{v}_0. \tag{138a}$$

Was den Rotationsbestandteil von $\mathfrak{A}$ anbelangt, der durch den Vektor $[\mathfrak{u}\mathfrak{r}]$ bestimmt ist, so ist es hier notwendig, den von M nach einem Punkte des Segmentes QQ' gezogenen Radiusverkehr $\mathfrak{r}$ in einen zum Fahrstrahl $\mathfrak{R}$ parallelen und einen zu ihm senkrechten Vektor zu zerlegen. Der von dem letzteren herrührende Anteil des Vektorpotentiales fällt bei der Integration über das Segment heraus; man erhält demnach

$$d\mathfrak{A}_2 = \lambda d\lambda \frac{\varrho}{c} \cdot \int d\omega \frac{(\mathfrak{R}\mathfrak{r})}{R^2} \cdot [\mathfrak{u}\mathfrak{R}].$$

Ist ζ der Winkel, den der nach dem betreffenden Punkte des Segmentes von P aus gezogene Fahrstrahl mit PM einschließt, so ist

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{R}) = R(R - \lambda\cos\zeta),$$

daher

$$\int d\omega\,(\mathfrak{r}\mathfrak{R}) = 2\pi R \cdot \int_0^\eta \sin\zeta d\zeta (R - \lambda\cos\zeta)$$

$$= 2\pi R\left\{R(1-\cos\eta) - \frac{\lambda}{2}(1-\cos^2\eta)\right\}.$$

Mit Rücksicht auf den oben gegebenen Wert von $\cos\eta$:

$$\cos\eta = \frac{R^2 + \lambda^2 - a^2}{2R\lambda},$$

wird

$$\int d\omega\,(\mathfrak{r}\mathfrak{R}) = 2\pi R\left\{\frac{a^2-(R-\lambda)^2}{2\lambda} - \frac{4\lambda^2R^2-(R^2+\lambda^2-a^2)^2}{8\lambda R^2}\right\}$$

$$= \frac{\pi R}{\lambda}\left\{a^2-(R-\lambda)^2-\lambda^2+\frac{(R^2+\lambda^2-a^2)^2}{4R^2}\right\}.$$

Nach einigen Umformungen ergiebt dies

$$\int d\omega\,(\mathfrak{r}\mathfrak{R}) = \frac{\pi R a^2}{\lambda}\cdot Q,$$

wobei abkürzungsweise gesetzt ist

$$Q = \frac{a^2+2R^2-2\lambda^2}{4R^2} - \frac{(R-\lambda)^3(3R+\lambda)}{4a^2R^2}.$$

Nunmehr ist der Beitrag zum Rotationsbestandteil des Vektorpotentiales zu schreiben

$$d\mathfrak{A}_2 = \frac{3e}{4ac}\frac{d\lambda}{R}\,Q\cdot[\mathfrak{u}\mathfrak{R}]. \tag{138b}$$

c) Punkt außerhalb des Elektrons. Dreiecksbildung aus R, λ, a unmöglich.

$$R + a \leqq \lambda.$$

In diesem Falle schneidet die um den Aufpunkt mit dem Radius λ geschlagene Kugel das Elektron nicht, sondern sie schließt es ein. Ein Beitrag zu den Potentialen im Aufpunkt wird nicht beigesteuert.

Es sind demnach bei der Berechnung der elektromagnetischen Potentiale nur die Fälle (a) und (b) heranzuziehen. Die Integration nach λ ist auszuführen, wenn die Bewegung des Elektrons bekannt ist, somit $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{v}_0$, und — was allerdings nur für den Rotationsbestandteil des Vektorpotentiales in Betracht kommt — $\mathfrak{u}$ als Funktion von λ gegeben sind.

Die in diesem Paragraphen abgeleiteten Formeln für das Feld eines beliebig bewegten Elektrons sind in allgemeiner Weise zuerst von A. Sommerfeld[56]) aufgestellt worden. Die auf die Translationsbewegung bezüglichen Formeln sind unabhängig von P. Hertz[19]) gefunden worden, auf einem Wege, der im wesentlichen dem hier eingeschlagenen entspricht.

§ 25. Unstetige Bewegung des Elektrons.

Wir gehen jetzt zur Behandlung des Problems über, welches den Gegenstand der Dissertation von P. Hertz bildet: Ein Elektron bewege sich bis zur Zeit $t = 0$ gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$; zu dieser Zeit soll seine Geschwindigkeit plötzlich auf $\mathfrak{v}_2$ springen und weiterhin wieder nach Richtung und Betrag konstant bleiben. Welches ist das Feld des Elektrons und insbesondere die entsandte Wellenstrahlung? Diese Frage läßt sich vollständig beantworten, wenn man $\mathfrak{v}_2$ parallel $\mathfrak{v}_1$ und beide Geschwindigkeiten kleiner als c annimmt.

Wir legen den Anfangspunkt des Koordinatensystemes in den Punkt des Raumes, der sich zur Zeit $t = 0$ mit dem Mittelpunkte des Elektrons deckt; die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ sollen beide der x-Achse parallel sein. Die im vorigen Paragraphen eingeführte Größe

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2 + z^2} \tag{139}$$

ist die Entfernung eines beliebigen Aufpunktes von demjenigen Punkte, der zur Zeit $t - \frac{\lambda}{c}$ den Mittelpunkt des Elektrons bildete. Es ist

$$\begin{cases} \xi = \beta_1 (l - \lambda) & \text{für} \quad l < \lambda, \\ \xi = 0 & \text{„} \quad l = \lambda, \\ \xi = \beta_2 (l - \lambda) & \text{„} \quad l > \lambda. \end{cases} \tag{139a}$$

Dabei stellen $c\beta_1$ und $c\beta_2$ die „alte" und die „neue" Geschwindigkeit vor; ihr Vorzeichen gibt an, ob die Bewegung parallel der positiven oder der negativen x-Achse erfolgt. Durch (139, 139a) wird R als Funktion von x, y, z, $ct = l$ und dem Latenswege λ dargestellt.

Wir fassen einen Aufpunkt ins Auge, der zur Zeit t außerhalb des Elektrons liegt. Dieser Punkt liegt dann auch zur Zeit $t - \frac{\lambda'}{c}$ außerhalb des Elektrons, wo λ' den kleinsten in Betracht kommenden Latensweg bezeichnet; in der Tat, verfolgen wir die Bewegung des Elektrons rückwärts, indem wir gleichzeitig die Kugel vom Aufpunkt aus mit Lichtgeschwin-

digkeit sich dilatieren lassen, so findet zwischen Elektron und Kugel zuerst äußere Berührung statt. Die Kugel überstreicht nun das Elektron, welches sich mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegt, nur einmal; zur Zeit $t - \frac{\lambda''}{c}$ tritt sie aus dem Elektron aus; λ'' ist dabei der größte in Betracht kommende Latensweg. Das skalare Potential im Aufpunkt ist nach (136)

$$(140) \qquad \Phi = \frac{e}{2a}\int_{\lambda'}^{\lambda''}\frac{d\lambda}{R} \qquad \text{bei Flächenladung.}$$

Die Integrationsgrenzen sind nach (135a, b)

$$(140\text{a}) \qquad \lambda' = R' - a, \quad \lambda'' = R'' + a.$$

Denn zur Zeit $t - \frac{\lambda'}{c}$ lag, wie wir sahen, der Aufpunkt außerhalb des Elektrons; für die Bestimmung der oberen Integrationsgrenze λ'' ist es gleichgültig, ob er außerhalb oder innerhalb des Elektrons liegt. Die Integrationsgrenzen sind die gleichen, wenn es sich um Volumladung handelt; es liegt dann der Fall (b) des vorigen Paragraphen vor. Nach Gleichung (138) ist

$$(140\text{b}) \qquad \Phi = \frac{3e}{4a^3}\int_{\lambda'}^{\lambda''}\frac{d\lambda}{R}\left\{a^2 - (R-\lambda)^2\right\} \qquad \text{bei Volumladung.}$$

Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden.

$$(\text{A}) \qquad l < \lambda' < \lambda''.$$

Hier ist im ganzen Integrationsbereiche λ größer als l; es ist in (138) für ξ der erste der Werte (139a) zu setzen, mithin

$$(141) \qquad R = R_1 = \sqrt{(x - \beta_1 l + \beta_1 \lambda)^2 + y^2 + z^2}.$$

Das skalare Potential und das Vektorpotential berechnen sich in diesem Falle so, als ob das Elektron seine alte Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ dauernd behielte.

$$(\text{B}) \qquad l > \lambda'' > \lambda'.$$

Hier ist im ganzen Integrationsintervalle λ kleiner als l; für ξ ist der letzte der Werte (139a) zu setzen, und daher für R

$$(141\text{a}) \qquad R = R_2 = \sqrt{(x - \beta_2 l + \beta_2 \lambda)^2 + y^2 + z^2}.$$

Die elektromagnetischen Potentiale entsprechen in diesem Falle der neuen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_2$.

(C) $$\lambda' < l < \lambda''.$$

Hier hat man das Integrationsintervall in zwei Teilintervalle zu zerlegen; im ersten, wo $\lambda' < \lambda < l$ ist, liegt der dritte, im zweiten, wo $l < \lambda < \lambda''$ ist, der erste der in (139a) zusammengestellten Fälle vor. Demnach ist

$$\Phi = \frac{e}{2a}\int\limits_{\lambda'}^{l}\frac{d\lambda}{R_2} + \frac{e}{2a}\int\limits_{l}^{\lambda''}\frac{d\lambda}{R_1} \tag{141b}$$

das skalare Potential bei Flächenladung, und das Vektorpotential

$$\mathfrak{A}_x = \frac{e}{2a}\int\limits_{\lambda'}^{l}\beta_2\frac{d\lambda}{R_2} + \frac{e}{2a}\int\limits_{l}^{\lambda''}\beta_1\frac{d\lambda}{R_1}. \tag{141c}$$

Bei Volumladung ist entsprechend zu verfahren.

Es liegt nahe, eine neue Variable

$$h = \lambda - R \tag{142}$$

einzuführen. Es ist gemäß (140a)

$$h = -a \text{ für } \lambda = \lambda', \; h = +a \text{ für } \lambda = \lambda''.$$

Für $\lambda = l$, wo $\xi = 0$, und nach (139)

$$R = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

wird, ist $h = l - r$. Setzen wir noch

$$\frac{dh}{d\lambda} = \frac{S}{R},$$

so wird demgemäß

$$\Phi = \frac{e}{2a}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{dh}{S_1} \text{ im Falle (A),} \tag{142a}$$

$$\Phi = \frac{e}{2a}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{dh}{S_2} \text{ im Falle (B),} \tag{142b}$$

$$\Phi = \frac{e}{2a}\int\limits_{-a}^{l-r}\frac{dh}{S_2} + \frac{e}{2a}\int\limits_{l-r}^{+a}\frac{dh}{S_1} \text{ im Falle (C)} \tag{142c}$$

Das gilt für Flächenladung. Bei Volumladung folgt aus (140b)

$$\text{(142d)}\quad \Phi = \frac{3e}{4a^3}\int\limits_{-a}^{l-r}\frac{dh(a^2-h^2)}{S_2} + \frac{3e}{4a^3}\int\limits_{l-r}^{+a}\frac{dh(a^2-h^2)}{S_1} \quad \text{im Falle (C).}$$

Es ist noch S zu bestimmen. Aus (139, 139a) und (142) erhalten wir

$$\frac{S}{R} = \frac{dh}{d\lambda} = 1 - \frac{dR}{d\lambda} = \frac{R - \beta(x - \xi)}{R}.$$

Es ist demnach

$$\text{(143)}\qquad S = R - \beta(x - \beta l + \beta\lambda) = R - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}\mathfrak{R})$$

eine Größe, welche der in Gleichung (69a) eingeführten Größe s entspricht. Je nachdem man $\mathfrak{v}$ gleich $\mathfrak{v}_1$ oder $\mathfrak{v}_2$ setzt und $\mathfrak{R}$ gleich $\mathfrak{R}_1$ oder $\mathfrak{R}_2$, geht S in S_1 oder S_2 über.

Aus (142) und (143) folgt

$$\text{(143a)}\qquad S = \lambda\varkappa^2 - h - \beta(x - \beta l), \quad \varkappa^2 = 1 - \beta^2.$$

Zur Auswertung der obigen Integrale ist es erforderlich, S durch x, y, z, l und h auszudrücken; wir haben zu diesem Zwecke noch λ als Funktion jener fünf Größen zu berechnen. Dies geschieht mit Hilfe der aus (142) sich ergebenden quadratischen Gleichung

$$(\lambda - h)^2 = R^2 = (x - \beta l + \beta\lambda)^2 + y^2 + z^2,$$

aus der man für den Ausdruck (143a) erhält

$$\text{(143b)}\qquad S = \sqrt{(x - \beta l + \beta h)^2 + \varkappa^2(y^2 + z^2)};$$

wir haben die positive Wurzel genommen, weil aus (143) folgt, daß bei Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit S stets eine positive Größe ist.

Die Integrale (142a, b) lassen sich nunmehr auswerten. Wir erhalten im Falle (A) für Flächenladung

$$\text{(144)}\quad \Phi = \frac{e}{2a\beta_1}\ln\left\{\frac{x-\beta_1 l+\beta_1 a+\sqrt{(x-\beta_1 l+\beta_1 a)^2+(1-\beta_1^2)(y^2+z^2)}}{x-\beta_1 l-\beta_1 a+\sqrt{(x-\beta_1 l-\beta_1 a)^2+(1-\beta_1^2)(y^2+z^2)}}\right\}.$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß dieser Ausdruck für das skalare Potential eines gleichförmig bewegten Elektrons

mit dem auf ganz anderem Wege in (112e, g) erhaltenen übereinstimmt; es steht hier $x - \beta_1 l$, statt wie dort x, weil hier ein im Raume festes, dort ein mit dem Elektron mitbewegtes Bezugssystem zugrunde gelegt wird. Seiner Ableitung gemäß gilt der Ausdruck (144) für das skalare Potential im Falle (A) außerhalb des flächenhaft geladenen Elektrons. Im Falle (B) tritt nur β_2 an die Stelle von β_1. Herrscht im Falle (A) das „alte", der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ entsprechende Feld, so herrscht im Falle (B) das „neue" Feld, welches einer gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_2$ entspricht.

Die beiden Gebiete, in denen das Feld sich durch die stationäre Bewegung des Elektrons vor oder nach der unstetigen Änderung seiner Geschwindigkeit bestimmt, werden offenbar durch eine Wellenzone voneinander getrennt sein, welche durch den Geschwindigkeitssprung hervorgerufen worden ist. Das Gebiet der Welle ist eben dasjenige, in dem der Fall (C) statthat. Es ist hier

$$\lambda' < l < \lambda'',$$

daher

$$-a < l - r < +a;$$

denn es waren $-a$, $l - r$, $+a$ die Werte von h, welche sich den Werten λ', l, λ'' von λ zuordneten, und es ändern sich, da ja S und R stets positiv sind, λ und h stets in demselben Sinne. Bei $l - r = -a$, wo (142c) in (142b) übergeht, liegt die Grenze der Wellenzone gegen das neue Feld: bei $l - r = -a$, wo (142c) in (142a) übergeht, geht die Wellenzone in das alte Feld über. Man hat demnach

für $r > l + a$ das alte Feld,
für $l + a > r > l - a$ die Wellenzone,
für $r < l - a$ das neue Feld.

Die beim Geschwindigkeitssprunge erregte Welle besitzt eine Breite, welche dem Durchmesser $2a$ des Elektrons gleich ist. Sie pflanzt sich von der Sprungstelle des Elektrons aus mit Lichtgeschwindigkeit fort; außerhalb des äußeren Randes der Wellenzone

herrscht das alte, innerhalb des inneren Randes das neue Feld.

Unsere Entwickelungen beziehen sich auf einen Aufpunkt, welcher außerhalb des Elektrons liegt. Wenn wir zur Bestimmung des in der Wellenzone herrschenden Feldes die Ausdrücke (142c, d) heranziehen, so setzen wir dabei stillschweigend voraus, daß die Wellenzone über das Elektron bereits hinweggestrichen ist. Da die größte Entfernung eines dem Elektron angehörenden Punktes vom Koordinatenursprung gleich

$$|\mathfrak{v}_2|\,t + a = |\beta_2|\,l + a$$

ist, so muß

$$|\beta_2|\,l + a < l - a$$

sein, damit das Elektron sich ganz im neuen Felde befinde. Es muß also sein:

$$l > l^*, \quad l^* = \frac{2a}{1 - |\beta_2|}. \tag{145}$$

Dann hat die Wellenzone sich vom Elektron losgelöst und das elektromagnetische Feld der Welle wird durch (142c) im Falle der Flächenladung, durch (142d) im Falle der Volumladung gegeben.

Wir wollen die Feldstärken der Wellenzone unter der Annahme bestimmen, daß die Entfernung derselben von der Sprungstelle des Elektrons bereits groß gegen den Radius des Elektrons geworden ist. Alsdann braucht man bei der Differentiation der Potentialausdrücke (142c, d) nach der Zeit und nach den Koordinaten nur diejenigen Terme zu berücksichtigen, welche durch die Differentiation der Integralgrenze $(l - r)$ entstehen; die übrigen Terme verschwinden gegen diese in dem Maße, wie die Entfernung vom Koordinatenursprung zunimmt. Es wird

$$\left.\begin{aligned} &(146) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{e}{2as_2} - \frac{e}{2as_1} \\ &(146\text{a}) \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial l} = -\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial r} = \frac{e\beta_2}{2as_2} - \frac{e\beta_1}{2as_1} \end{aligned}\right\} \text{ bei Flächenladung.}$$

Hier sind unter s_1, s_2 die Werte zu verstehen, welche die Größen S_1 und S_2 annehmen, wenn $h = l - r$ gesetzt wird; wir wissen nun, daß diesem Werte von h der Wert l von λ und der Wert r von R sich zuordnet; es ist nach (143)

$$(146\text{b}) \qquad s_1 = r(1 - \beta_1 \cos\varphi), \quad s_2 = r(1 - \beta_2 \cos\varphi),$$

wo φ den Winkel anzeigt, den der vom Koordinatenursprung aus gezogene Fahrstrahl $\mathfrak{r}$ mit der x-Achse einschließt. Wir erhalten demnach

$$\left.\begin{aligned}
&(146\text{c}) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{e(\beta_2 - \beta_1)\cos\varphi}{2ar(1-\beta_1\cos\varphi)\cdot(1-\beta_2\cos\varphi)} \\
&(146\text{d}) \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial l} = -\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial r} = \frac{e(\beta_2 - \beta_1)}{2ar(1-\beta_1\cos\varphi)\cdot(1-\beta_2\cos\varphi)}
\end{aligned}\right\} \text{bei Flächenladung.}$$

Die beiden anderen Komponenten des Vektorpotentiales sowie die Differentialquotienten von Φ und $\mathfrak{A}_x$ nach Richtungen, welche zum Radiusvektor $\mathfrak{r}$ senkrecht sind, verschwinden.

Man überzeugt sich demgemäß leicht davon, daß die durch (28) und (29) bestimmten Vektoren

$$\mathfrak{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial l}, \qquad \mathfrak{H} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}$$

beide senkrecht zum Radiusvektor $\mathfrak{r}$ gerichtet sind; der elektrische Vektor liegt in der durch die x-Achse gelegten Ebene der magnetische weist senkrecht zu dieser Ebene. Die Beträge der beiden Vektoren sind, bei Flächenladung,

$$(146\text{e}) \qquad |\mathfrak{E}| = |\mathfrak{H}| = \frac{e\,|\beta_2 - \beta_1|\sin\varphi}{2ar(1-\beta_1\cos\varphi)\cdot(1-\beta_2\cos\varphi)}.$$

Das flächenhaft geladene Elektron erzeugt bei dem Geschwindigkeitssprunge eine Welle, längs deren Breite ($2a$) die Feldstärken konstant sind; an den Rändern sind die Feldstärken unstetig.

Im Falle der Volumladung ist die Betrachtung in ganz entsprechender Weise durchzuführen. Aus (142d) folgt

$$(147) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{3e}{4a^3}\cdot\frac{a^2-(l-r)^2}{s_2} - \frac{3e}{4a^3}\cdot\frac{a^2-(l-r)^2}{s_1},$$

und es werden die Beträge der Feldstärken

$$(147\,\mathrm{a})\qquad |\mathfrak{E}| = |\mathfrak{H}| = \frac{3e}{4a^3}\cdot\frac{|\beta_2-\beta_1|\sin\varphi\,\{a^2-(l-r)^2\}}{r(1-\beta_1\cos\varphi)\cdot(1-\beta_2\cos\varphi)}.$$

Das gleichförmig über sein Volumen geladene Elektron erzeugt bei seinem Geschwindigkeitssprunge eine Welle, in der von der Mitte ($l=r$) die Feldstärken stetig gegen die Ränder ($l-r=\pm a$) hin abnehmen. An den Rändern sind die Feldstärken Null, sie gehen demnach stetig in die Feldstärken der stationären Felder über, die in den betrachteten Entfernungen vom Elektron gleichfalls verschwinden.

Vertauscht man die Reihenfolge der beiden Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$, indem man jetzt annimmt, daß die Geschwindigkeit, statt von $\mathfrak{v}_1$ auf $\mathfrak{v}_2$, von $\mathfrak{v}_2$ auf $\mathfrak{v}_1$ springt, so kehren die Differentialquotienten (146, 146a, 147) der elektromagnetischen Potentiale das Zeichen um. Es wechseln mithin die Feldstärken die Richtung, ohne jedoch ihren Betrag zu ändern. Die Dichten der Energie und der Bewegungsgröße in der Wellenzone bleiben bei dieser Vertauschung der Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ ungeändert. Hieraus folgt das von P. Hertz aufgestellte „Vertauschungsgesetz“: Vertauscht man die Reihenfolge der bei dem Geschwindigkeitssprunge in Betracht kommenden Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$, so bleibt die ausgestrahlte Energie und der ausgestrahlte Impuls ungeändert.

Wir könnten die Energie W_{12} und den Impuls $\mathfrak{G}_{12}$, der bei dem Geschwindigkeitssprunge ausgestrahlt wird, durch Integration über die ganze Wellenzone auf Grund der Formeln (146e) und (147a) berechnen. Indessen läßt sich gerade auf das Vertauschungsgesetz eine einfachere Methode der Berechnung gründen[19]).

Wir denken uns zunächst ein Elektron, das vorher mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ gleichförmig bewegt war, plötzlich gehemmt. Es wird dann eine Welle von der Breite $2a$ in den Raum hinaussenden; nach der Auffassung J. J. Thomsons[61]) würde dieses die Art sein, wie beim Aufprall der Kathoden-

strahlen auf die Antikathode die Röntgenstrahlen entstehen. Es sei nun W_1 die Energie des gleichförmig bewegten Elektrons. Nach der plötzlichen Hemmung kann sich die gesamte Energie des Feldes nicht ändern, da ja die elektromagnetische Kraft an dem ruhenden Elektron keine Arbeit leistet. Wartet man so lange, bis die Entfernung der Wellenzone vom Elektron groß gegen den Radius des Elektrons geworden ist, so ist die Feldenergie gleich der Summe aus der elektrostatischen Energie W_0 des Elektrons und der in der Wellenzone enthaltenen Energie W_{10}. Es ist

$$W_{10} = W_1 - W_0, \tag{148}$$

d. h. die ausgestrahlte Energie ist gleich dem Überschusse der Energie des bewegten Elektrons über diejenige des ruhenden. Im Falle der Flächenladung folgt aus (113b)

$$W_{10} = \frac{e^2}{2a}\left\{\frac{1}{\beta_1} ln\left(\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}\right) - 2\right\}, \tag{148a}$$

ein Ausdruck, der im Falle der Volumladung mit $^6/_5$ zu multiplizieren ist.

Betrachten wir jetzt den umgekehrten Fall, daß das Elektron plötzlich in Bewegung gesetzt wird. Es ist das ein Vorgang, der möglicherweise bei der Emission der Radiumstrahlen angenähert realisiert ist. Dieser Fall geht durch Vertauschung der Geschwindigkeiten 0 und $\mathfrak{v}_1$ aus dem soeben erledigten hervor. Es folgt demnach aus dem Vertauschungsgesetz

$$W_{01} = W_1 - W_0 = \frac{e^2}{2a}\left\{\frac{1}{\beta_1} ln\left(\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}\right) - 2\right\} \tag{148b}$$

für die Energie der ausgesandten Wellenstrahlung. Wir sehen also: Wird ein Elektron plötzlich in Bewegung gesetzt, so ist die Energie der entsandten Wellenstrahlung gleich dem Überschusse der vom Elektron mitgeführten Energie über seine elektrostatische Energie.

Wir wenden uns jetzt dem allgemeinen Falle eines beliebigen Geschwindigkeitssprunges zu, indem wir von der für

unser starres Elektron allgemein gültigen Relation (97) ausgehen. Da Rotationen hier nicht angenommen werden, so ist

$$\frac{dW}{dt} = \left(\mathfrak{v}\frac{d\mathfrak{G}}{dt}\right)$$

die Aussage jener aus dem Energiesatz und dem Impulssatz abgeleiteten Beziehung. Wir integrieren von der Zeit $t = 0$ des Sprunges bis zu einer Zeit t, zu der die Welle sich bereits weit von dem Elektron entfernt hat. Es wird, da ja in diesem Zeitintervall die Geschwindigkeit konstant gleich $\mathfrak{v}_2$ sein soll,

$$\int_0^t dt\frac{dW}{dt} = \mathfrak{v}_2\int_0^t dt\frac{d\mathfrak{G}}{dt}.$$

Zur Zeit $t = 0$ waren W_1, $\mathfrak{G}_1$ Energie und Impuls des Feldes, zur Zeit t sind die Gesamtwerte von Energie und Impuls

$$W_2 + W_{12} \quad \text{und} \quad \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_{12}.$$

Es ist somit

$$W_{12} + W_2 - W_1 = \mathfrak{v}_2 \cdot \{\mathfrak{G}_{12} + \mathfrak{G}_2 - \mathfrak{G}_1.\} \tag{149}$$

Nach dem Vertauschungsgesetz ist nun für den umgekehrten Fall eines Sprunges von $\mathfrak{v}_2$ auf $\mathfrak{v}_1$

$$W_{21} = W_{12}, \quad \mathfrak{G}_{21} = \mathfrak{G}_{12}.$$

Es folgt also durch Vertauschung von $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ aus (149)

$$W_{12} + W_1 - W_2 = \mathfrak{v}_1 \cdot \{\mathfrak{G}_{12} + \mathfrak{G}_1 - \mathfrak{G}_2\}. \tag{149a}$$

In dem Falle, wo $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ parallel sind, kann man aus (149) und (149a) die ausgestrahlte Energie und die ausgestrahlte Bewegungsgröße berechnen. Nach Symmetrie sind hier die Vektoren $\mathfrak{G}_{12}$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ den genannten Vektoren parallel; wir verstehen unter G_{12}, G_1, G_2 ihre Beträge, mit positivem oder negativem Vorzeichen versehen, je nachdem die Vektoren in Richtung der x-Achse oder in die entgegengesetzte Richtung weisen.

Aus den Gleichungen

$$W_{12} + W_2 - W_1 = c\beta_2 \{G_{12} + G_2 - G_1\}$$
$$W_{12} + W_1 - W_2 = c\beta_1 \{G_{12} + G_1 - G_2\}$$

folgt durch Elimination von W_{12} oder G_{12}

(149b) $$G_{12} = \frac{2(W_2 - W_1)}{c(\beta_2 - \beta_1)} - \frac{\beta_2 + \beta_1}{\beta_2 - \beta_1}(G_2 - G_1)$$

(149c) $$W_{12} = \frac{\beta_2 + \beta_1}{\beta_2 - \beta_1}(W_2 - W_1) - 2c\beta_1\beta_2\frac{G_2 - G_1}{\beta_2 - \beta_1}.$$

Es bestimmen sich also die Energie und Bewegungsgröße, welche bei einem ohne Richtungsänderung stattfindenden Geschwindigkeitssprunge ausgestrahlt werden, aus den in (113a, b) angegebenen Werten für die Energie und die Bewegungsgröße eines gleichförmig bewegten Elektrons.

Durch Einführung dieser Werte folgt für die ausgestrahlte Energie der allgemein gültige Ausdruck:

(149d) $$W_{12} = \frac{e^2}{2a}\left\{\left(\frac{1 - \beta_1\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}\right) ln\left(\frac{1 + \beta_2}{1 - \beta_2} \cdot \frac{1 - \beta_1}{1 + \beta_1}\right) - 2\right\}.$$

Derselbe geht, für $\beta_2 = 0$, in (148b) über. Aus (149b) folgt als Wert der ausgestrahlten Bewegungsgröße bei plötzlicher Hemmung oder plötzlicher Fortschleuderung:

$$G_{01} = G_{10} = \frac{2(W_1 - W_0)}{c\beta_1} - G_1.$$

Da nun, nach (103),

$$c\beta_1 G_1 = 2T_1$$

ist, und

$$W_1 - W_0 = U_1 + T_1 - U_0,$$

so wird (vgl. 113c)

(149e) $$G_{01} = G_{10} = \frac{2(U_1 - U_0)}{c\beta_1} = \frac{e^2}{2ac\beta_1}\left\{\frac{3 - \beta_1^2}{2\beta_1} ln\left(\frac{1 + \beta_1}{1 - \beta_1}\right) - 3\right\}.$$

Im Falle der Volumladung sind die Ausdrücke (149d, e), wie die für W_1, W_2, G_1, G_2 geltenden, mit dem Faktor 6/5 zu multiplizieren.

Bei instantaner Reflexion, wo

$$\beta_2 = -\beta_1, \; G_2 = -G_1, \; W_2 = W_1$$

zu setzen ist, erhält man aus (149c)

(149f) $$W_{12} = 2c\beta_1 G_1 = 4T_1$$

und aus (149b)

(149g) $$G_{12} = 0.$$

Im Falle instantaner Reflexion ist der ausgestrahlte Impuls gleich Null. Die ausgestrahlte Energie ist gleich der vierfachen magnetischen Energie des gleichförmig bewegten Elektrons.

Man kann von vornherein zweifeln, ob ein plötzlicher Geschwindigkeitssprung überhaupt durch endliche Kräfte zu verwirklichen ist. Auch diese Frage ist von P. Hertz[19]) in Untersuchung gezogen worden; es hat sich ergeben, daß die resultierende äußere Kraft $\mathfrak{K}^a$, welche erforderlich ist, um das Elektron, von der Ruhe aus, plötzlich auf die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ zu bringen und in dieser zu halten, für $|\mathfrak{v}_1| \leqq c$ in jedem Momente eine endliche ist. Diese Kraft ist nicht, wie die Stoßkraft der gewöhnlichen Mechanik, eine unendliche Kraft, welche nur im Augenblick des Stoßes wirkt, sondern sie verteilt sich über das Zeitintervall $0 \leqq t \leqq t^*$, wo t^* der Zeitpunkt ist, wo das Elektron gerade aus der Wellenzone heraustritt. Diesen Zeitpunkt haben wir in (145) berechnet; er ist

(150) $$t^* = \frac{2a}{c - |\mathfrak{v}_1|},$$

wenn

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 \quad \text{für} \quad t > 0.$$

Daß die über jenes Intervall erstreckten Zeitintegrale der Kraft $\mathfrak{K}^a$ und der Arbeitsleistung $\mathfrak{v}\mathfrak{K}^a$ endlich sind, folgt ohne weiteres aus den obigen Resultaten. Von der Zeit t^* an ist das Elektron von dem stationären, der gleichförmigen Bewegung entsprechenden Felde umgeben, so daß zur Aufrechterhaltung der Bewegung keine Kraft mehr erforderlich ist. Von jetzt an sind Energie und Bewegungsgröße des Feldes konstant; sie haben die Werte

$$W_1 + W_{01} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_{01},$$

welche sich nach einiger Zeit in dem Felde des gleichförmig bewegten Elektrons und in der entsandten Welle vorfinden.

Es folgt demnach, mit Rücksicht auf (148b)

$$(150\text{a})\quad \int_0^{t^*} (\mathfrak{v}\mathfrak{K}^a)\,dt = W_{01} + W_1 - W_0$$
$$= 2(W_1 - W_0) = \frac{e^2}{a}\left\{\frac{1}{\beta_1} ln\left(\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}\right) - 2\right\}.$$

Die gesamte Arbeit bei plötzlicher Fortschleuderung ist doppelt so groß, als wenn die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ auf quasistationäre Weise erreicht worden wäre.

Da in dem Zeitintervalle $0 < t < t^*$ die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ konstant gleich $\mathfrak{v}_1$ ist, so ist das Zeitintegral der äußeren Kraft dem Betrage nach gleich dem durch die Geschwindigkeit geteilten Zeitintegral der Arbeit:

$$\int_0^{t^*} \mathfrak{K}^a\,dt = \frac{\mathfrak{v}_1}{|\mathfrak{v}_1|^2}\cdot 2(W_1 - W_0),$$

mithin

$$(150\text{b})\quad \int_0^{t^*} \mathfrak{K}^a\,dt = \mathfrak{v}_1 \cdot \frac{e^2}{ac^2\beta_1^2}\left\{\frac{1}{\beta_1} ln\left(\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}\right) - 2\right\}.$$

Der Impuls und die Arbeit der äußeren Kraft haben beide einen endlichen Wert, wofern die Geschwindigkeit, die hervorgerufen wird, kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist.

Geht man nun zur Grenze der Lichtgeschwindigkeit über, so werden allerdings, den Gleichungen (150a, b) zufolge, die Zeitintegrale der Kraft und der Arbeit beide unendlich. Es ist aber zu beachten, daß dabei nach (150) die obere Grenze der Integrale, d. h. die Zeit, zu der die Welle das Elektron überstrichen hat, ins Unendliche wächst. Und hierdurch allein wird das Unendlichwerden der Zeitintegrale bedingt, wie P. Hertz gezeigt hat. Zu jeder endlichen Zeit nach dem Stoße bleiben auch bei Erreichung der Lichtgeschwindigkeit die Kraft, der Impuls und die Energie endlich.

Unsere Dynamik des Elektrons schließt also keineswegs die Möglichkeit aus, daß in der Natur mit Lichtgeschwindigkeit bewegte Elektronen vorkommen, sei es, daß wir die An-

nahme der Flächenladung oder diejenige der Volumladung bevorzugen. Freilich liegen in diesem singulären Falle sehr verwickelte Verhältnisse vor. Da das Elektron sich mit derselben Geschwindigkeit bewegt wie die Wellen, die es bei Erreichung seiner Geschwindigkeit entsandt hat, so kann man hier die Wellenstrahlung von der Konvektionsstrahlung nicht sondern. Man muß beide gemeinsam betrachten und die Energie und die Bewegungsgröße des gesamten Feldes in Rechnung ziehen. — Auf den Fall der Überlichtgeschwindigkeit kommen wir weiter unten in § 27 zurück.

§ 26. Die innere Kraft eines beliebig bewegten Elektrons.

Wir haben in § 24 die elektromagnetische Potentiale eines beliebig bewegten kugelförmigen Elektrons durch Integrale nach dem Latenswege dargestellt. Der direkteste Weg zur Berechnung der inneren Kräfte wäre der, aus jenen Formeln das Feld und den Vektor $\mathfrak{F}$ zu bestimmen, und durch Integration über das Volumen des Elektrons die innere Kraft und Drehkraft zu ermitteln. Es ist A. Sommerfeld[56]) gelungen, die Schwierigkeiten, die sich der Beschreitung dieses Weges entgegenstellen, zu überwinden.

Die Verknüpfung des durch die Grundgleichung (V) gegebenen Vektors $\mathfrak{F}$, der elektromagnetischen Kraft pro Einheit der Ladung, mit den elektromagnetischen Potentialen ist leicht zu finden. Nach (28) und (29) ist

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}] = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}].$$

Führen wir ein Bezugsystem ein, welches die translatorische Bewegung des Elektrons mitmacht, so ist nach Bd. I, Gl. 116, S. 116:

$$\frac{\partial'\mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} + (\mathfrak{v}_0\nabla)\mathfrak{A}$$

die von diesem Bezugsystem aus beurteilte zeitliche Änderung des Vektors $\mathfrak{A}$. Da $\mathfrak{v}_0$, die Geschwindigkeit des Mittelpunktes des Elektrons, vom Orte überhaupt nicht abhängt, so folgt aus Regel (ν) der Formelzusammenstellung in Bd. I, S. 453

$$\nabla(\mathfrak{v}_0\mathfrak{A}) = (\mathfrak{v}_0\nabla)\mathfrak{A} + [\mathfrak{v}_0\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}].$$

Es ist demnach

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t} - \nabla(\mathfrak{v}_0 \mathfrak{A}) + [\mathfrak{v}_0 \operatorname{curl} \mathfrak{A}].$$

Führen wir dieses in den Ausdruck des Vektors $\mathfrak{F}$ ein und setzen an Stelle von t wieder die Variable $l = ct$, so erhalten wir unter Beachtung der kinematischen Grundgleichung (VII):

$$\mathfrak{F} = -\nabla \Psi - \frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial l} + \frac{1}{c}\left[[\mathfrak{u}\mathfrak{r}] \operatorname{curl} \mathfrak{A}\right] \tag{151}$$

Der hier auftretende Skalar

$$\Psi = \Phi - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}_0 \mathfrak{A}) \tag{151a}$$

geht bei gleichförmiger Translationsbewegung in das Konvektionspotential über, als dessen negativer Gradient sich bei einer solchen Bewegung der Vektor $\mathfrak{F}$ darstellt.

Wir wollen uns mit einer beliebigen rotationslosen Bewegung des Elektrons beschäftigen. Hier ergibt (151)

$$\mathfrak{F} = -\nabla \Psi - \frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial l}. \tag{151b}$$

Im Falle gleichförmiger Volumladung bestimmt sich hieraus die innere Kraft

$$\mathfrak{K} = \frac{3e}{4\pi a^3}\int \mathfrak{F}\, dv \tag{152}$$

folgendermaßen:

$$-\mathfrak{K} = \frac{3e}{4\pi a^3}\int dv \left\{\nabla \Psi + \frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial l}\right\}. \tag{152a}$$

Im Falle der Flächenladung muß man bei der Berechnung der inneren Kraft vorsichtiger zu Werke gehen; es sind nämlich die räumlichen und zeitlichen Differentialquotienten der Potentiale an der geladenen Fläche nicht stetig. Man berechnet daher zunächst die Kraft, welche das Elektron auf eine geladene Kugel vom Radius $b \gtrless a$ ausübt, und geht erst nach Auswertung dieser Kraft zur Grenze $b = a$ über. Diese Ab-

leitung der inneren Kraft eines flächenhaft geladenen Elektrons

$$\mathfrak{K} = \lim_{b=a} \frac{e}{4\pi b^2} \int \mathfrak{F} d \tag{152b}$$

führt zu dem Ausdrucke

$$-\mathfrak{K} = \lim_{b=a} \frac{e}{4\pi b^2} \int df \left\{ \nabla \Psi + \frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial l} \right\}. \tag{152c}$$

Wie wir wissen (vgl. § 24), lassen sich die elektromagnetischen Potentiale des Elektrons durch einfache, nach dem Latenswege genommene Integrale darstellen. Wir wollen schreiben

$$\Phi = e \int_0^\infty \chi d\lambda. \tag{153}$$

Dann wird, bei reiner Translationsbewegung,

$$\mathfrak{A} = \frac{e}{c} \int_0^\infty \chi \mathfrak{v}_{l-\lambda} d\lambda, \tag{153a}$$

und gemäß (151a),

$$\Psi = e \int_0^\infty \chi \left\{ 1 - \frac{\mathfrak{v}_l \mathfrak{v}_{l-\lambda}}{c^2} \right\} d\lambda. \tag{153b}$$

Diese Ausdrücke sollen nun in (152a, c) eingeführt werden, und es soll die Integration über das Volumen v, bzw. die Fläche f vorgenommen werden. Es seien χ_1 bzw. χ_2 die Werte, welche der in (153) auftretenden Größe χ im Falle der Flächenladung bzw. der Volumladung zuzuschreiben sind. Wir setzen dann

$$\bar{\chi}_1 = \frac{1}{4\pi b^2} \int \chi_1 df \tag{153c}$$

$$\bar{\chi}_2 = \frac{3}{4\pi a^3} \int \chi_2 dv. \tag{153d}$$

Diese Mittelwerte von χ in (152a, c) einführend, erhalten wir im Falle der Flächenladung

$$-\frac{1}{e^2} \cdot \mathfrak{K} = \lim_{b=a} \int_0^\infty d\lambda \left\{ 1 - \frac{\mathfrak{v}_l \mathfrak{v}_{l-\lambda}}{c^2} \right\} \nabla_T \bar{\chi}_1 + \lim_{b=a} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial l} \int_0^\infty d\lambda \mathfrak{v}_{l-\lambda} \bar{\chi}_1, \tag{154}$$

hingegen im Falle der Volumladung

$$(154\text{a}) \quad -\frac{1}{e^2}\cdot \mathfrak{K} = \int_0^\infty d\lambda \left\{1 - \frac{\mathfrak{v}_l \mathfrak{v}_{l-\lambda}}{c^2}\right\} \nabla_T \bar{\chi}_2 + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial l}\int_0^\infty d\lambda\, \mathfrak{v}_{l-\lambda}\, \bar{\chi}_2 \,.$$

Hierbei verstehen wir unter $\mathfrak{T}$ den Fahrstrahl, der von irgendeinem im Raume festen Punkte nach dem Mittelpunkte des Elektrons in seiner zur Zeit $t = \frac{l}{c}$ eingenommenen Lage gezogen ist. Den in (154) und (154a) eingehenden Gradienten von $\bar{\chi}$ erhält man, indem man die durch ∇_T angedeutete Verrückung des Mittelpunktes vornimmt und dabei l und λ konstant hält.

Um diese Ausdrücke der resultierenden inneren Kraft auszuwerten, ist die in (153) eingehende Funktion χ von λ nach den Angaben des § 24 zu berechnen, und es sind die durch (153c, d) angedeuteten Integrationen über die Ausdehnung des Elektrons auszuführen. Es kommen dabei nur solche Werte von λ in Betracht, für welche die um den betreffenden Aufpunkt gelegte Kugel vom Radius λ das Elektron in seiner zur Zeit $\frac{l-\lambda}{c}$ eingenommenen Lage schneidet. Im Falle der Flächenladung ist die Bedingung hierfür die in (135) angegebene: Es muß eine Dreiecksbildung aus den drei Strecken R, λ, a möglich sein. Nach (136) ist dann die in (153) eingeführte Größe χ gleich $\frac{1}{2aR}$; sie ist gleich Null, wenn keine Dreiecksbildung aus jenen drei Strecken möglich ist. Nun kann ein und derselbe Aufpunkt für die früheren Lagen des Elektrons bald ein innerer und bald ein äußerer sein, so daß die Grenzen, innerhalb deren χ von Null verschieden ist, durch (135b) bzw. durch (135a) gegeben werden. Auch sind alle zur Zeit t vom Elektron bedeckten Aufpunkte in Betracht zu ziehen. Hiernach wären zur Bestimmung von $\bar{\chi}$ bereits bei Flächenladung sehr umständliche Fallunterscheidungen notwendig; unter Annahme von Volumladung wären dieselben noch zahlreicher.

Diese Fallunterscheidungen vermeidet nun Sommerfeld durch einen Kunstgriff; er stellt die verschiedenen Werte-

möglichkeiten von χ durch einen einheitlichen analytischen Ausdruck dar, nach Art des Dirichletschen diskontinuierlichen Faktors. Bekanntlich*) ist

$$\int_0^\infty \sin sx \frac{ds}{s} = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad x \gtrless 0.$$

Betrachten wir jetzt das Produkt

$$4 \sin sa \cdot \sin sR \cdot \sin s\lambda = \sin s(a + R - \lambda) + \sin s(a - R + \lambda) \\ - \sin s(a + R + \lambda) - \sin s(a - R - \lambda).$$

Von den vier Größen

$$a + R - \lambda, \quad a - R + \lambda, \quad -a - R - \lambda, \quad -a + R + \lambda$$

sind drei positiv und nur eine ist negativ, falls Dreiecksbildung aus den drei Strecken a, R, λ möglich ist; ist hingegen die Dreiecksbildung nicht möglich, weil eine der drei Strecken größer ist als die Summe der beiden anderen, so sind von den vier Größen zwei positiv und zwei negativ. Das Integral

$$\int_0^\infty \sin sa \cdot \sin sR \cdot \sin s\lambda \cdot \frac{ds}{s}$$

ist mithin gleich $\frac{\pi}{4}$ oder gleich Null, je nachdem eine Dreiecksbildung möglich ist oder nicht. Wir können daher im Falle der Flächenladung die Größe χ durch dieses Integral ausdrücken:

$$\chi_1 = \frac{2}{\pi a} \int_0^\infty \sin sa \cdot \sin s\lambda \cdot \frac{\sin sR}{R} \cdot \frac{ds}{s}, \tag{155}$$

so daß das skalare Potential (153) wird

$$\Phi = \frac{2e}{\pi a} \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty \sin sa \sin s\lambda \frac{\sin sR}{R} \frac{ds}{s}. \tag{155a}$$

Was den Fall der Volumladung anbelangt, so können wir ihn leicht auf denjenigen der Flächenladung zurückführen,

*) Vgl. Riemann-Weber. Die part. Diffgl. d. math. Phys. I, § 13, S. 29.

indem wir die Kugel vom Radius a in Kugelschichten zerlegen, vom Radius r, von der Dicke dr und der Ladung $4\pi\varrho r^2 dr = \frac{3e}{a^3} r^2 dr$. Schreiben wir in (155a) statt a jetzt r, statt e jetzt $\frac{3e}{a^3} r^2 dr$, so entsteht durch Integration nach r das skalare Potential des gleichförmig über sein Volumen geladenen Elektrons:

$$\Phi = \frac{6e}{\pi a^3} \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty \sin s\lambda \frac{\sin sR}{R} \frac{ds}{s} \int_0^a r \sin sr\, dr.$$

Da nun gilt

$$\int_0^a r \sin sr\, dr = \frac{\sin sa - sa \cos sa}{s^2},$$

so wird im Falle der Volumladung

$$\text{(155b)} \quad \Phi = \frac{6e}{\pi a} \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty \sin s\lambda \frac{\sin sR}{R} \left\{ \frac{\sin sa - sa \cos sa}{(sa)^2} \right\} \frac{ds}{s}.$$

In diesem Falle ist der Größe χ der Wert zuzuschreiben

$$\text{(155c)} \qquad \chi_2 = \frac{6}{\pi a} \int_0^\infty \sin s\lambda \frac{\sin sR}{R} \left\{ \frac{\sin sa - sa \cos sa}{(sa)^2} \right\} \frac{ds}{s}.$$

In den drei in § 24 unterschiedenen Lagen des Aufpunktes muß $e\chi_2 d\lambda$ die Werte (137), (138) und Null annehmen. Die gefundenen einheitlichen analytischen Ausdrücke gestatten es, ohne weiteres die zur Berechnung der Mittelwerte $\bar{\chi}_1$, $\bar{\chi}_2$ erforderlichen Integrationen über die Oberfläche bzw. über das Volumen des Elektrons auszuführen.

Wir verstehen unter N (Abb. 4) den Ort des Mittelpunktes des Elektrons zur Zeit t, unter M seinen Ort zur Zeit $t - \frac{\lambda}{c}$. Um N schlagen wir eine Kugel mit dem Radius b. Über diese Kugel ist χ_1 zu integrieren, um den durch (153c) definierten Mittelwert zu berechnen. Es sollte $\mathfrak{T}$ der von

einem beliebig gewählten, aber dann festgehaltenen Raumpunkte aus nach N gezogene Fahrstrahl sein. Wir wählen M als diesen festen Punkt, so daß T, der Betrag von $\mathfrak{T}$, durch die Strecke MN vorgestellt wird. R bezeichnet nach wie vor den Radiusvektor, der von M aus nach dem Punkte gezogen ist, für welchen Φ bzw. χ berechnet werden soll; das ist hier ein Punkt P auf der Oberfläche der Kugel vom Radius b. Ist endlich ζ der Winkel, welcher in dem Dreieck aus den Strecken R, T, b, der Seite R gegenüberliegt, so gilt

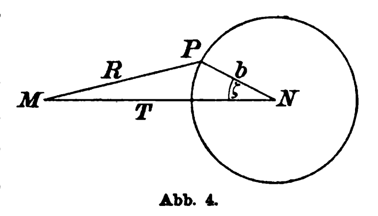


Abb. 4.

$$2bT\cos\zeta = T^2 + b^2 - R^2.$$

Schreitet man längs der Kugelfläche fort, so sind T und b konstant zu halten; es folgt

$$bT\sin\zeta d\zeta = RdR.$$

Demnach ist der Flächeninhalt eines von zwei Breitenkreisen ζ und $\zeta + d\zeta$ begrenzten Streifens

$$df = 2\pi b^2 \sin\zeta d\zeta = \frac{2\pi b R dR}{T}.$$

Da nun längs eines solchen Streifens nach (155) die Größe χ_1 konstant ist, so können wir für den Mittelwert (153c) schreiben:

$$\bar{\chi}_1 = \frac{1}{2Tb} \cdot \int\limits_{|T-b|}^{T+b} \chi_1 R dR. \tag{156}$$

Diese Grenzbestimmung gilt sowohl dann, wenn M innerhalb wie auch dann, wenn M außerhalb der Kugel vom Radius b liegt. Aus (155) und (156) folgt jetzt

$$\bar{\chi}_1 = \frac{1}{\pi T a b} \cdot \int\limits_0^\infty \mu \sin sa \sin s\lambda \frac{ds}{s},$$

wenn abkürzungsweise gesetzt wird

$$\mu = \int\limits_{|T-b|}^{T+b} dR \sin sR = \frac{1}{s}\left\{\cos s(T-b) - \cos s(T+b)\right\};$$

es findet sich

$$\mu = \frac{2}{s} \cdot \sin sT \cdot \sin sb,$$

so daß man schließlich erhält

$$(156\text{a}) \qquad \bar{\chi}_1 = \frac{2}{\pi a b}\int_0^\infty \sin sa \sin sb \frac{\sin sT}{T} \sin s\lambda \frac{ds}{s^2}\,.$$

Für unser kugelförmiges Elektron läßt sich auch im Falle der Volumladung die durch (153d) postulierte Mittelwertsbildung ohne Schwierigkeit durchführen. In dem Ausdruck (155c) von χ_2 ist es nur der Faktor $\frac{\sin sR}{R}$ des Integranden, der für die verschiedenen Punkte des Elektrons einen verschiedenen Wert hat. Der Mittelwert dieses Faktors berechnet sich nun für das Volumen der Kugel in ganz ähnlicher Weise wie oben für die Kugelfläche. Es ist

$$\frac{3}{4\pi a^3}\int \frac{\sin sR}{R}\, dv = \frac{3}{2a^3 T}\int_0^a r\,dr \cdot \int_{|T-r|}^{T+r} \sin sR\, dR$$

$$= \frac{3}{a^3} \cdot \frac{\sin sT}{sT} \cdot \int_0^a \sin sr \cdot r\,dr = \frac{3}{a} \cdot \frac{\sin sT}{sT} \cdot \left\{\frac{\sin sa - sa \cos sa}{(sa)^2}\right\}.$$

Demnach erhalten wir

$$(156\text{b}) \quad \bar{\chi}_2 = \frac{18}{\pi a^2}\int_0^\infty \sin s\lambda \frac{\sin sT}{T} \left\{\frac{\sin sa - sa\cos sa}{(sa)^2}\right\}^2 \frac{ds}{s^2}\,.$$

Indem wir die so erhaltenen Mittelwerte (156a, b) von χ in die allgemeinen Ansätze (154) und (154a) für die innere Kraft einführen, gelangen wir zu den Sommerfeldschen Kraftausdrücken:

$$(157) \qquad -\frac{\pi a}{2e^2} \cdot \mathfrak{K}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{b=a} \frac{1}{b}\int_0^\infty d\lambda \left\{1 - \frac{\mathfrak{v}_l \mathfrak{v}_{l-\lambda}}{c^2}\right\} \frac{\mathfrak{T}}{T}\int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \sin sa \sin sb \sin s\lambda \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\sin sT}{T}\right)$$

$$+ \operatorname*{Lim}_{b=a} \frac{1}{bc}\frac{\partial}{\partial l}\int_0^\infty d\lambda\, \mathfrak{v}_{l-\lambda}\int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \sin sa \sin sb \sin s\lambda \frac{\sin sT}{T}\,.$$

(157a)
$$-\frac{\pi a^2}{18 e^2}\cdot \mathfrak{K}$$
$$=\int_0^\infty d\lambda\left\{1-\frac{\mathfrak{v}_l \mathfrak{v}_{l-\lambda}}{c^2}\right\}\frac{\mathfrak{T}}{T}\int_0^\infty\frac{ds}{s^2}\left\{\frac{\sin sa - sa\cos sa}{(sa)^2}\right\}^2 \sin s\lambda\,\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\sin sT}{T}\right)$$
$$+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial l}\int_0^\infty d\lambda\,\mathfrak{v}_{l-\lambda}\int_0^\infty\frac{ds}{s^2}\left\{\frac{\sin sa - sa\cos sa}{(sa)^2}\right\}^2 \sin s\lambda\,\frac{\sin sT}{T}.$$

Diese Formeln stellen die vom kugelförmigen, rein translatorisch bewegten Elektron auf sich selbst ausgeübte Kraft im Falle homogener Flächenladung und homogener Volumladung in allgemeinster Weise dar.

In seiner Mitteilung in den Göttinger Nachrichten hat Sommerfeld die Integrationen nach s ausgeführt; dabei gelangt der in § 17 erwähnte Umstand zur analytischen Formulierung, daß die innere Kraft durch die Bewegung des Elektrons in einem endlichen, dem betrachteten Zeitpunkte unmittelbar vorangegangenen Intervalle bestimmt ist, wenigstens dann, wenn die Bewegung dauernd mit Unterlichtgeschwindigkeit oder mit Überlichtgeschwindigkeit erfolgt ist. Ausnahmefälle treten dann ein, wenn das Elektron sich zuerst mit Überlichtgeschwindigkeit und dann mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegt oder gar die Richtung umkehrt; dann können offenbar Wellen, die vom Elektron selbst in einer längst vergangenen Epoche entsandt worden sind, eine Kraft auf dasselbe ausüben. Alle denkbaren Fälle werden durch die obigen Formeln in einen einheitlichen analytischen Ausdruck zusammengefaßt, so daß die Ermittelung der inneren Kraft für eine gegebene Bewegung nur noch eine Sache der Rechnung ist.

Sommerfeld hat auch die Drehkraft und die Rotationsbewegung in entsprechender Weise behandelt. Von größerem Interesse ist jedoch die Anwendung auf translatorische Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit, der wir uns jetzt zuwenden wollen.

§ 27. Gleichförmige Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit.

Bei gleichförmiger geradliniger Bewegung wird

$$\mathfrak{v}_l = \mathfrak{v}_{l-\lambda} = c\beta, \quad T = \beta\lambda.$$

In den Ausdrücken (157) und (157a) für die innere Kraft fallen die Differentialquotienten nach l fort. Die Differentiationen nach T können durch solche nach λ ersetzt werden, so daß nach Umkehr der Integrationsordnung für die der Bewegung parallel gerechnete innere Kraft bei Flächenladung folgt

$$(158) \qquad -\frac{\pi a}{2e^2}\mathfrak{K}$$

$$= \frac{1-\beta^2}{\beta^2}\cdot \operatorname*{Lim}_{b=a}\frac{1}{b}\int\limits_0^\infty \frac{ds}{s^2}\sin sa \sin sb \int\limits_0^\infty d\lambda \sin s\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\sin\beta s\lambda}{\lambda}\right),$$

und bei Volumladung

$$(158\text{a}) \qquad -\frac{\pi a^2}{18 e^2}\mathfrak{K}$$

$$= \frac{1-\beta^2}{\beta^2}\cdot\int\limits_0^\infty \frac{ds}{s^2}\left\{\frac{\sin sa - sa\cos sa}{(sa)^2}\right\}^2\int\limits_0^\infty d\lambda \sin s\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\sin\beta s\lambda}{\lambda}\right).$$

Das nach λ genommene Integral läßt sich auswerten; es ergibt die partielle Integration

$$\int\limits_0^\infty d\lambda \sin s\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\sin\beta s\lambda}{\lambda}\right) = -s\int\limits_0^\infty d\lambda \cos s\lambda \frac{\sin\beta s\lambda}{\lambda}$$

$$= -\frac{s}{2}\left\{\int\limits_0^\infty d\lambda \frac{\sin(\beta+1)s\lambda}{\lambda} + \int\limits_0^\infty d\lambda \frac{\sin(\beta-1)s\lambda}{\lambda}\right\}.$$

Da nun

$$\int\limits_0^\infty d\lambda \frac{\sin(\beta+1)s\lambda}{\lambda} = \frac{\pi}{2}, \qquad \int\limits_0^\infty d\lambda \frac{\sin(\beta-1)s\lambda}{\lambda} = \pm\frac{\pi}{2} \text{ für } \beta \gtrless 1,$$

so erhält man

$$(158\text{b}) \quad \int\limits_0^\infty d\lambda \sin s\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\sin\beta s\lambda}{\lambda}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } \beta < 1 \\ -\frac{s\pi}{2} & \text{für } \beta > 1. \end{cases}$$

Für $\beta < 1$ ist die innere Kraft Null, sowohl im Falle der Flächenladung wie im Falle der Volumladung. Es folgt das uns bereits bekannte Resultat: **Die gleichförmige geradlinige Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit ist eine kräftefreie Bewegung des Elektrons.**

Für $\beta > 1$ hingegen folgt aus (158) und (158b) für den Fall der Flächenladung

$$
(158\text{c}) \qquad -\frac{a}{e^2}\mathfrak{K} = \frac{\beta^2-1}{\beta^2}\cdot \operatorname*{Lim}_{b=a}\frac{1}{b}\int\limits_0^\infty \frac{ds}{s}\sin sa\,\sin sb\,.
$$

Um das Integral nach s auszuwerten, teilen wir das Integrationsintervall in zwei Teile, $0 < s < \varepsilon$ und $\varepsilon < s < \infty$ Es wird

$$
\int\limits_0^\infty \frac{ds}{s}\sin sa\,\sin sb = \int\limits_0^\varepsilon \frac{ds}{s}\sin sa\,\sin sb
$$

$$
+\frac{1}{2}\int\limits_\varepsilon^\infty \frac{ds}{s}\cos(b-a)\,s - \frac{1}{2}\int\limits_\varepsilon^\infty \frac{ds}{s}\cos(b+a)s\,.
$$

Für die Differenz der beiden letzten Integrale folgt, nach Einführung der Variabeln $p = |b-a|\,s$ bzw. $p = (b+a)\,s$,

$$
\frac{1}{2}\int\limits_{\varepsilon|b-a|}^\infty \cos p\,\frac{dp}{p} - \frac{1}{2}\int\limits_{\varepsilon(b+a)}^\infty \cos p\,\frac{dp}{p} = \frac{1}{2}\int\limits_{\varepsilon|b-a|}^{\varepsilon(b+a)} \cos p\,\frac{dp}{p}
$$

$$
= \frac{1}{2}\int\limits_{\varepsilon|b-a|}^{\varepsilon(b+a)} \frac{dp}{p} + \frac{1}{2}\int\limits_{\varepsilon|b-a|}^{\varepsilon(b+a)} (\cos p - 1)\,\frac{dp}{p} = \frac{1}{2}\,ln\left(\frac{b+a}{|b-a|}\right) - \int\limits_{\varepsilon|b-a|}^{\varepsilon(b+a)} \frac{dp}{p}\sin^2\frac{p}{2}\,.
$$

Durch Summation folgt

$$
\int\limits_0^\infty \frac{ds}{s}\sin sa\,\sin sb = \frac{1}{2}\,ln\left(\frac{b+a}{|b-a|}\right) + \int\limits_0^\varepsilon \frac{ds}{s}\sin sa\,\sin sb
$$

$$
-\int\limits_{\varepsilon|b-a|}^{\varepsilon(b+a)} \frac{dp}{p}\sin^2\frac{p}{2}\,.
$$

Diesem Ausdrucke proportional ist die Kraft, welche das flächenhaft geladene Elektron auf eine mitbewegte konzentrische,

mit derselben Ladung versehene Kugelfläche vom Radius b ausübt. Indem wir die ganz beliebig zu wählende Größe ε gegen Null konvergieren lassen, erhalten wir als Wert dieser Kraft

$$(158\text{d})\qquad \mathfrak{K} = -\frac{e^2}{ab}\cdot\frac{\beta^2-1}{\beta^2}\cdot\frac{1}{2}\,ln\left(\frac{b+a}{|b-a|}\right) \quad \text{für} \quad b \gtrless a.$$

Die Kraft, welche die Kugel a auf die konzentrische Kugel b und umgekehrt auch die Kugel b auf die Kugel a bei gemeinsamer gleichförmiger Translation mit Überlichtgeschwindigkeit ausübt, wirkt stets der Bewegung entgegen. Ihr Betrag ist ein endlicher, falls die Radien der beiden Kugeln verschieden sind. Führt man indessen den Grenzübergang zum Falle zweier Kugeln von gleichem Radius aus, um die innere Kraft des flächenhaft geladenen Elektrons zu berechnen, so findet man, daß die Kraft logarithmisch unendlich wird. Man schließt hieraus: Die gleichförmige Bewegung eines flächenhaft geladenen kugelförmigen Elektrons mit Überlichtgeschwindigkeit erfordert eine unendliche Kraft; sie ist somit physikalisch unmöglich.

Zum Falle der Volumladung übergehend, erhalten wir aus (158a, b)

$$-\frac{a^2}{9e^2}\cdot\mathfrak{K} = \frac{\beta^2-1}{\beta^2}\cdot\int_0^\infty \frac{ds}{s}\left\{\frac{\sin sa - sa\cos sa}{(sa)^2}\right\}^2.$$

Für das hier auftretende Integral nach s erhält man, nach Einführung der Variabeln $p = as$, durch einige Umformungen

$$\int_0^\infty \frac{dp}{p^5}\left(\sin p - p\cos p\right)^2 = -\left\{\frac{(\sin p - p\cos p)^2}{4p^4}\right\}_0^\infty$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dp}{p^3}\sin p\,(\sin p - p\cos p) = -\left\{\frac{\sin p\,(\sin p - p\cos p)}{4p^2}\right\}_0^\infty$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{dp}{p^2}\left(\cos p\sin p - p\cos^2 p + p\sin^2 p\right)$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^\infty dp\left(\frac{1}{2}\frac{\sin 2p}{p^2} - \frac{\cos 2p}{p}\right) = -\frac{1}{4}\left\{\frac{\sin 2p}{2p}\right\}_0^\infty = \frac{1}{4}.$$

Daher wird schließlich

$$\mathfrak{K} = -\frac{9}{4}\frac{e^2}{a^2}\cdot\left(1-\frac{1}{\beta^2}\right) \tag{158e}$$

die der Bewegung entgegenwirkende innere Kraft im Falle der Volumladung. Wir sehen also:

Die gleichförmige Bewegung des mit gleichförmiger Volumladung erfüllten Elektrons mit Überlichtgeschwindigkeit ist zwar keine kräftefreie Bewegung, aber die erforderliche äußere Kraft hat einen endlichen Betrag, so daß Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit bei Volumladung physikalisch denkbar ist. Der Betrag der Kraft steigt mit wachsender Geschwindigkeit an und konvergiert gegen den Grenzwert

$$|\mathfrak{K}| = \frac{9}{4}\frac{e^2}{a^2};$$

derselbe ist gleich der Kraft, welche zwei ruhende Punktladungen e im Abstand $\frac{2}{3}a$ aufeinander ausüben.

Die hier zutage tretende prinzipielle Verschiedenheit von Flächenladung und Volumladung des allseitig symmetrischen Elektrons ist um so bemerkenswerter, als bei Unterlichtgeschwindigkeit das Verhalten des Elektrons in beiden Fällen das nämliche ist. Bei quasistationärer Bewegung unterscheiden sich die Massen in beiden Fällen nur durch einen Zahlenfaktor, und derselbe Zahlenfaktor tritt bei der Strahlung des unstetig bewegten Elektrons auf. Auch die Kraft, welche erforderlich ist, um das Elektron plötzlich auf Lichtgeschwindigkeit zu bringen und auf dieser zu halten, ist im Falle der Volumladung von derselben Größenordnung wie im Falle der Flächenladung. Aus dem Verhalten der Elektronen bei Unterlichtgeschwindigkeit und bei Lichtgeschwindigkeit wird daher kaum ein Kriterium herzuleiten sein, welches zwischen diesen beiden Möglichkeiten entscheidet. Die Entscheidung wäre aber sofort gegeben, und zwar zugunsten der Volumladung, sobald man Elektronen beobachtet hätte, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen.

Es ist allerdings kaum zu hoffen, daß es gelingen wird, die Elektronen, selbst wenn ihnen im Innern des Radiumatomes solche Geschwindigkeiten erteilt wären, auf Überlichtgeschwindigkeit zu halten; denn die hierzu erforderliche Kraft ist eine so enorme, daß sie die Kräfte der experimentell herstellbaren Felder um das Billionenfache übersteigt. Was geschieht aber, wenn das einmal auf Überlichtgeschwindigkeit gebrachte Elektron aus dem Kraftfeld heraustritt? Auch diese Frage ist von A. Sommerfeld[56]) und P. Hertz[20]) erörtert worden.

Es zeigt sich, daß im Falle der Volumladung jedem stetigen Kraftverlauf eine stetige Bewegung des Elektrons zuzuordnen ist.

Zweiter Abschnitt.

Elektromagnetische Vorgänge in wägbaren Körpern.

Erstes Kapitel.

Ruhende Körper.

§ 28. Ableitung der Hauptgleichungen aus der Elektronentheorie.

Im ersten Bande dieses Werkes (§ 65) haben wir die Hauptgleichungen der Maxwellschen Theorie für ruhende Körper entwickelt. Der dort eingenommene Standpunkt war derjenige der Phänomenologie, welche sich mit der Darstellung der beobachteten Erscheinungen begnügt und ein Eingehen auf atomistische Vorstellungen ablehnt. Bei den meisten elektromagnetischen Vorgängen im engeren Sinne, insbesondere bei denjenigen, die in ruhenden Körpern stattfinden, erweist sich die phänomenologische Behandlungsweise als ausreichend, und sogar durch ihre größere Einfachheit als der atomistischen Auffassung überlegen.

Nun haben wir aber gewisse Erscheinungen der Konvektionsstrahlung kennen gelernt, welche sich nur vom atomistischen Standpunkte aus befriedigend haben deuten lassen. Wir haben gesehen, daß die negativen Elektronen, die wir in den Kathoden- und Radiumsstrahlen als bewegt annehmen, auch bei der Lichtstrahlung der Körper eine Rolle spielen. Wir wollen uns indessen hiermit nicht begnügen; wir wollen versuchen, die elektromagnetischen und optischen Erscheinungen in ihrer Gesamtheit auf Grund der Elektronentheorie zu begreifen. Wir müssen zu diesem Zwecke zunächst den Nachweis führen, daß die Hauptgleichungen der Elektrodynamik sich aus den Grundgleichungen der Elektronentheorie ableiten lassen.

Die Elektronentheorie kennt nur das elektromagnetische Feld im Äther, welches durch ruhende oder konvektiv bewegte Elektronen erregt wird. Sie nimmt an, daß dieses elektromagnetische Feld auch im Innern der ponderablen Körper besteht, oder, wie man zu sagen pflegt, daß der Äther die ponderablen Körper durchdringt. Daß die elektrischen und magnetischen Eigenschaften der Körper von denjenigen des leeren Raumes abweichen, wird darauf zurückgeführt, daß Elektronen sich im Innern des Körpers befinden. Die Leitfähigkeit der Körper wird durch „Leitungselektronen" erklärt, welche entweder wie in den Metallen frei beweglich oder wie in den Elektrolyten an neutrale Atom- oder Molekülgruppen gebunden sein können; diese wandern im Körper unter der Einwirkung elektrischer Kräfte über größere Strecken hin und bilden so einen elektrischen Leitungsstrom. Die elektrische Polarisation der Dielektrika wird auf negative Elektronen zurückgeführt, welche an die positiven gebunden sind und mit ihnen zusammen elektrische Dipole bilden. Die Bewegung dieser „Polarisationselektronen" in veränderlichen elektrischen Feldern wird einen elektrischen Strom ergeben, welcher den auf die Materie entfallenden Anteil des Verschiebungsstromes bildet. Führen die gebundenen negativen Elektronen ferner umlaufende Bewegungen um die positiven aus, so geben sie zu einer Magnetisierung des Körpers Veranlassung und

werden dann als „Magnetisierungselektronen“ zu bezeichnen sein. Es werden allerdings auch die freien Elektronen im magnetischen Felde sich in gekrümmten Bahnen bewegen und so die Rolle von Magnetisierungselektronen spielen können.

Die von den einzelnen Elektronen erregten Felder, auf welche sich die Grundgleichungen des § 4 (I bis IV) beziehen, weisen außerordentlich große räumliche Unregelmäßigkeiten auf. Hat doch das Feld des ruhenden Elektrons in den beiden Endpunkten eines Elektronendurchmessers die entgegengesetzte Richtung. Entsprechende starke zeitliche Schwankungen der Feldstärken werden den Grundgleichungen zufolge an einem im Raume festen Punkte auftreten, wenn ein Elektron sich über ihn hinweg bewegt. Wir erwähnten bereits in § 4, daß die Felder, deren Existenz die Grundgleichungen postulieren, der direkten Beobachtung unzugänglich sind. Es sind immer nur die Mittelwerte, auf welche die Beobachtungen sich beziehen. Die Mittelwertsbildung über die Felder der einzelnen Elektronen wird uns zu den Hauptgleichungen der Maxwellschen Theorie führen und wird uns zeigen, wie die dort auftretenden Vektoren mit den in den Feldgleichungen der Elektronentheorie auftretenden beiden Vektoren zusammenhängen.

Wir wollen die Bezeichnungen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ für die in den Hauptgleichungen auftretenden Feldstärken der beobachtbaren Felder reservieren und daher, um Verwechselungen vorzubeugen, für die elektromagnetischen Vektoren, welche durch die Grundgleichungen (I bis IV) der Elektronentheorie miteinander verknüpft sind, jetzt die Bezeichnungen $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{h}$ einführen. Jene Gleichungen sind dann zu schreiben:

$$\text{(I)} \quad \operatorname{curl} \mathfrak{h} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\varrho \mathfrak{v},$$

$$\text{(II)} \quad \operatorname{curl} \mathfrak{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t},$$

$$\text{(III)} \quad \operatorname{div} \mathfrak{e} = 4\pi\varrho,$$

$$\text{(IV)} \quad \operatorname{div} \mathfrak{h} = 0.$$

Aus diesen Feldgleichungen hat H. A. Lorentz[31]) für den allgemeinen Fall eines bewegten Körpers die Hauptgleichungen

der Elektrodynamik durch Mittelwertsbildung abgeleitet. Wir werden in diesem Paragraphen die entsprechenden Entwickelungen für ruhende Körper durchführen. Hier ergeben alle auf dem Boden der Nahewirkung stehenden Theorien dasselbe, während in der Elektrodynamik bewegter Körper, wie wir später sehen werden, zwischen den verschiedenen Theorien gewisse Abweichungen vorhanden sind.

Wir bezeichnen mit H. A. Lorentz eine Strecke als „physikalisch unendlich klein", wenn sie klein ist gegen diejenigen Strecken, innerhalb deren eine merkliche Inhomogenität des Feldes besteht, aber groß gegen den Abstand zweier benachbarter Elektronen oder Moleküle. Es hängt dieser Definition gemäß wesentlich von der Inhomogenität des betreffenden Feldes ab, ob eine Strecke als physikalisch unendlich klein zu bezeichnen ist oder nicht; in der Elektrostatik z. B. wird eine Strecke, die gleich einer Wellenlänge des roten Lichtes ist, noch physikalisch unendlich klein zu nennen sein; denn die Probekörper, die zur Untersuchung des elektrostatischen Feldes verwandt werden, sind viel zu groß, um eine etwaige Inhomogenität des Feldes auf dieser Strecke überhaupt zu bemerken. In der Optik hingegen, wo es sich nach den Vorstellungen der elektromagnetischen Lichttheorie um Felder handelt, die auf einer Strecke von einer halben Wellenlänge die Richtung umkehren, wird jene Strecke keineswegs als physikalisch unendlich klein betrachtet werden dürfen. Andererseits legt die obige Definition eine gewisse, von der Zahl der Elektronen bzw. Moleküle abhängige untere Grenze für die physikalisch unendlich kleine Strecke fest. Sollen die beiden Bedingungen einander nicht widersprechen, so muß der mittlere Abstand zweier Moleküle verschwindend klein gegen die Wellenlänge sein, derart, daß in einem Würfel, dessen Kante etwa einem Hundertstel der Wellenlänge der betreffenden elektromagnetischen Welle gleich ist, noch viele Millionen von Elektronen enthalten sind. Von physikalisch unendlich kleinen Gebietsteilen kann nur die Rede sein, wenn die Materie entsprechend dicht gelagert ist.

Um den Mittelwert irgendeiner skalaren oder Vektorgröße q in einem Punkte P des Raumes zu bestimmen, konstruieren wir um P eine Kugel, deren Radius physikalisch unendlich klein ist, und dividieren das über die Kugel erstreckte Volumintegral von q durch das Volumen v der Kugel:

$$\bar{q} = \frac{\int q\,dv}{v}. \tag{159}$$

Bei der Vergleichung der Mittelwerte, welche zu zwei verschiedenen Zeiten in einem und demselben Punkte herrschen, ist selbstverständlich der Radius der Kugel konstant zu halten, so daß man hat

$$\overline{\frac{\partial q}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial t}. \tag{159a}$$

Es sind demnach Mittelwertsbildung und Differentiation nach der Zeit miteinander vertauschbare Operationen. Das gleiche gilt von den Operationen der Mittelwertsbildung und der Differentiation nach den Koordinaten. Hierbei handelt es sich um die Vergleichung der Werte von $\bar{q}$, welche in zwei benachbarten Punkten P und P' des Raumes zu derselben Zeit bestehen. Es sind dabei die Mittelwerte $\bar{q}$ durch zwei um P und P' geschlagene physikalisch unendlich kleine Kugeln von dem gleichen Radius definiert. Demgemäß ist z. B.

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\int q\,dv}{v}$$

nichts anderes als die durch Verrückung der Kugel parallel der x-Achse bedingte Veränderung des Volumintegrales von q, dividiert durch das Volumen der Kugel. Diese Veränderung läßt sich darstellen als herrührend von den (positiven oder negativen) Beiträgen derjenigen Volumelemente, welche die Oberfläche f der Kugel bei der Verrückung bestreicht. Es folgt

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = \frac{1}{v}\int q \cos(nx)\,df.$$

Andererseits ist der Mittelwert des Differentialquotienten von q nach x

$$\overline{\frac{\partial q}{\partial x}} = \frac{1}{v}\int \frac{\partial q}{\partial x}\,dv = \frac{1}{v}\int q \cos(nx)\,df,$$

so daß man erhält

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial q}{\partial x}}. \tag{159b}$$

Es sind also, wie behauptet, auch die räumliche Differentiation und die Mittelwertsbildung miteinander vertauschbare Operationen.

Auf Grund der Regeln (159a, b) ergeben sich durch Mittelwertsbildung aus (I bis IV) die Differentialgleichungen

$$\text{(Ia)} \quad \text{curl}\,\bar{\mathfrak{h}} = \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{\mathfrak{e}}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\overline{\varrho\mathfrak{v}},$$

$$\text{(IIa)} \quad \text{curl}\,\bar{\mathfrak{e}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{\mathfrak{h}}}{\partial t},$$

$$\text{(IIIa)} \quad \text{div}\,\bar{\mathfrak{e}} = 4\pi\bar{\varrho},$$

$$\text{(IVa)} \quad \text{div}\,\bar{\mathfrak{h}} = 0.$$

Indem die Mittelwerte für physikalisch unendlich kleine Bereiche gebildet wurden, sind die raschen und regellosen räumlichen Änderungen des Feldes, welche durch die atomistische Struktur der Elektrizität und der Materie bedingt sind, herausgefallen. Man kann daher bei der Berechnung des curl und der Divergenz der Vektoren $\bar{\mathfrak{e}}$ und $\bar{\mathfrak{h}}$ unter dx, dy, dz, statt mathematisch unendlich kleiner Strecken, auch physikalisch unendlich kleine Strecken verstehen. Ferner kann man die Mittelwertsbildungen, wie über den Raum, so auch über die Zeit erstrecken und unter dt ein „physikalisch unendlich kleines Zeitintervall" verstehen, das heißt ein solches, in welchem die Vektoren $\bar{\mathfrak{e}}$, $\bar{\mathfrak{h}}$ verschwindend geringe zeitliche Änderungen erfahren.

Wir betrachten zunächst den idealen Fall, daß der Körper nur Leitungselektronen enthält. Dann gilt

$$\{\bar{\varrho}\}_l = \varrho; \quad \{\overline{\varrho\mathfrak{v}}\}_l = \mathfrak{i}. \tag{160}$$

Die beobachtbaren Dichten der Elektrizität und des Leitungsstromes ϱ, $\mathfrak{i}$ sind dann einfach gleichzusetzen den Mittelwerten der Dichten der Elektrizität und des Konvektionsstromes, berechnet für physikalisch unendlich kleine Volumelemente. Nehmen

wir eine Reihe verschiedener Elektronenarten an, von den Ladungen $e_1, e_2, e_3 \ldots$, den auf die Volumeinheit berechneten Zahlen $N_1, N_2, N_3 \ldots$, und den mittleren Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3$, so hat man

$$\rho = N_1 e_1 + N_2 e_2 + N_3 e_3 \ldots \tag{160a}$$

$$\mathfrak{i} = N_1 e_1 \mathfrak{v}_1 + N_2 e_2 \mathfrak{v}_2 + N_3 e_3 \mathfrak{v}_3 \ldots \tag{160b}$$

Für einen idealen Leiter, der weder elektrisch polarisierbar noch magnetisierbar ist, erhält man die Hauptgleichungen der Maxwellschen Theorie, indem man $\mathfrak{E}$ und $4\pi\mathfrak{D}$ mit $\bar{\mathfrak{e}}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ mit $\bar{\mathfrak{h}}$ identifiziert. Im allgemeinen Falle aber sind zwei Paare elektrischer und magnetischer Vektoren in den Hauptgleichungen zu unterscheiden (Bd. I, § 65). Es kommt jetzt gerade darauf an, den Zusammenhang dieser Vektoren mit $\bar{\mathfrak{e}}$ und $\bar{\mathfrak{h}}$ richtig zu erfassen und den Unterschied zwischen wahrer und freier Elektrizität sowie wahrem und freiem Strome vom Standpunkte der Elektronentheorie aus zu verstehen. Im Hinblick hierauf wollen wir die Anteile von $\bar{\rho}$ und $\overline{\rho\mathfrak{v}}$ in Betracht ziehen, welche von den aneinander gebundenen positiven und negativen Elektronen herrühren.

Für ein elektrisch neutrales Molekül ist die Gesamtladung Null. Auch bildet die fortschreitende Bewegung eines solchen Moleküles keinen Leitungsstrom. Dennoch kann die gegenseitige Verschiebung der Elektronen im Molekül zu einer Abänderung des Mittelwertes $\bar{\rho}$ der räumlichen Dichte Veranlassung geben, der ja durch eine im Raume feste, physikalisch unendlich kleine Kugel definiert war. Auch können die inneren Bewegungen der Elektronen sich durch eine Änderung des Mittelwertes $\overline{\rho\mathfrak{v}}$ der Stromdichte bemerkbar machen.

Wir nennen das über das Volumen eines Moleküles erstreckte Integral

$$\mathfrak{p} = \int \rho \mathfrak{r} \, dv \tag{161}$$

das e l e k t r i s c h e M o m e n t d e s M o l e k ü l e s, indem wir unter $\mathfrak{r}$ den von einem festen Punkte O des Moleküles aus gezogenen Fahrstrahl verstehen. Hat man es mit einem aus zwei Punkt-

ladungen bestehenden Dipole zu tun, so ist $\mathfrak{p}$ das Moment des Dipols.

Wir wollen indessen die allgemeinere Annahme machen, daß sich in jedem Moleküle n Elektronen, von den Ladungen $e_1, e_2 \ldots e_n$, befinden. Das elektrische Moment des Moleküles ist dann

$$\mathfrak{p} = e_1\mathfrak{r}_1 + e_2\mathfrak{r}_2 + \cdots + e_n\mathfrak{r}_n, \tag{161a}$$

wobei

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_n = 0 \tag{161b}$$

ist. Es mag N die auf die Volumeinheit berechnete Zahl der Moleküle sein.

Wir betrachten ein im Raume festes, physikalisch unendlich kleines Flächenelement df. Welches wird die Elektrizitätsmenge sein, die bei der Herstellung der Momente der Moleküle durch das Flächenelement df tritt? Wir wollen zunächst voraussetzen, daß alle in einem physikalisch unendlich kleinen Bereiche gelegenen Moleküle das gleiche Moment $\mathfrak{p}$ besitzen; sollte diese Voraussetzung nicht erfüllt sein, so können wir doch verschiedene Molekülgruppen von den Momenten $\mathfrak{p}', \mathfrak{p}'' \cdots$ und den Molekülzahlen $N', N'' \cdots$ unterscheiden und die Moleküle jeder Gruppe gesondert betrachten. Auf die betreffende Molekülgruppe bezieht sich dann dasjenige, was hier von der ganzen Schar der Moleküle ausgesagt wird.

Wir wollen den Punkt O des Moleküles, von dem aus die Radienvektoren $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \cdots \mathfrak{r}_n$ gezogen sind, den Mittelpunkt des Moleküles nennen. Die Herstellung des Momentes $\mathfrak{p}$ erfolgt, indem die Ladung e_1 von O nach dem Endpunkte A_1 des Fahrstrahles $\mathfrak{r}_1$, die Ladung e_2 von O nach dem Endpunkte A_2 des Fahrstrahles $\mathfrak{r}_2$ bewegt wird, usf. Soll nun die Ladung e_1 bei der Verschiebung von O nach A_1 durch das im Raume feste, physikalisch unendlich kleine Flächenelement df hindurchtreten, so muß sich der Mittelpunkt O des Moleküles offenbar in dem schiefen Zylinder befinden, den man erhält, indem man von den Punkten des Flächenelementes df aus die Fahrstrahlen $-\mathfrak{r}_1$ konstruiert. Die Zahl der Moleküle,

deren Mittelpunkte innerhalb dieses Zylinders liegen, ist gleich der Zahl N der in der Volumeinheit enthaltenen Moleküle, multipliziert mit dem Rauminhalt des Zylinders, also gleich:

$$N \mathfrak{r}_{1n} df.$$

Diese Moleküle sind es, welche bei der Herstellung der Momente (161a) Elektronen erster Art durch df senden, und zwar im Sinne derjenigen Normalen, welche mit $\mathfrak{r}_1$ einen spitzen Winkel einschließt. Die gesamte, bei der Herstellung des Momentes mit den Elektronen erster Art durch df im Sinne der Normalen n tretende Elektrizitätsmenge wird durch

$$N e_1 \mathfrak{r}_{1n} df$$

auch dem Vorzeichen nach richtig angegeben. Die Anteile der verschiedenen Elektronen summierend, erhalten wir

$$N \mathfrak{p}_n df = \mathfrak{P}_n df$$

für die gesamte, bei der Herstellung der Momente durch df tretende Elektrizität. Dabei stellt $\mathfrak{P} = N\mathfrak{p}$ die Vektorsumme der Momente aller in der Volumeinheit enthaltenen Moleküle dar. Das erhaltene Resultat gilt auch dann, wenn die in einem physikalisch unendlich kleinen Volumelement liegenden Moleküle nicht alle das gleiche elektrische Moment besitzen. Man hat die Betrachtung dann auf jede Gruppe gleichartiger Moleküle anzuwenden und die Anteile aller Gruppen zu summieren.

In diesem allgemeineren Falle ist dann

$$\mathfrak{P} = N'\mathfrak{p}' + N''\mathfrak{p}'' + \cdots \tag{161c}$$

zu setzen.

Dieser Vektor stellt die auf die Volumeinheit berechnete „elektrische Polarisation“ dar. Indem die Elektronentheorie die Polarisation eines Dielektrikums auf die Verschiebung der gebundenen Elektronen zurückführt, verleiht sie dem Vektor $\mathfrak{P}$, der Bd. I, § 47 eingeführt wurde, eine konkrete physikalische Bedeutung.

Die bei der Polarisation des Dielektrikums durch ein im Raume festes Flächenelement df hindurchtretende Elektrizität wird durch $\mathfrak{P}_n df$ angegeben. Demnach ist

$$(162) \qquad \{\overline{\varrho \mathfrak{v}}\}_p = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}$$

der von den Polarisationselektronen herrührende Anteil der Stromdichte. Er stellt, den Vorstellungen der Elektronentheorie nach, den an der Materie haftenden Bestandteil des Verschiebungsstromes dar.

Bei der Herstellung der elektrischen Momente der Moleküle ist die Elektrizitätsmenge

$$\int \mathfrak{P}_n \, df = \int \operatorname{div} \mathfrak{P} \, dv$$

durch eine geschlossene Fläche herausgetreten. Vor Herstellung des Momentes, wo die Ladungen $e_1, e_2 \cdots e_n$ alle in dem Mittelpunkte 0 des Moleküles lagen, ging nach (161b) von dem einzelnen Moleküle überhaupt kein Kraftfluß aus; die mittlere Dichte der Elektrizität in jedem physikalisch unendlich kleinen Bereiche war gleich Null. Da nun bei Herstellung der Momente die soeben berechnete Elektrizitätsmenge aus dem Raume v herausgetreten ist, so erhalten wir für den von den Polarisationselektronen herrührenden Anteil der elektrischen Dichte:

$$(162a) \qquad \{\overline{\varrho}\}_p = -\operatorname{div} \mathfrak{P}.$$

Die Ausdrücke (162) und (162a) der von den Polarisationselektronen herrührenden Dichten des Stromes und der Elektrizität erfüllen, wie es sein muß, die Kontinuitätsbedingung

$$(162b) \qquad \operatorname{div} \{\overline{\varrho \mathfrak{v}}\}_p + \frac{\partial \{\overline{\varrho}\}_p}{\partial t} = 0.$$

Wie hat man sich weiter den Vorgang der Magnetisierung vom Standpunkte der Elektronentheorie aus zu veranschaulichen?

Wir denken uns ein Molekül, dessen Ladung und dessen elektrisches Moment $\mathfrak{p}$ (161a) beide gleich Null sind, so daß das Molekül weder zum Leitungsstrom noch zum Polarisationsstrom einen Beitrag liefert. Doch mögen die Elektronen im

Innern des Moleküls in Umlaufsbewegungen begriffen sein, derart, daß für das betreffende Molekül der Vektor

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\int dv \varrho [\mathfrak{r}\mathfrak{v}] = \frac{1}{2}\int dv [\mathfrak{r}\mathfrak{f}] \tag{163}$$

einen von Null verschiedenen Wert besitzt.

Dieser Vektor wird als „magnetisches Moment" des Moleküles bezeichnet. Sind n als Punktladungen zu betrachtende Elektronen im Moleküle in Umlaufsbewegungen begriffen, so ist sein magnetisches Moment

$$\mathfrak{m} = \frac{e_1}{c} \cdot \frac{1}{2}[\mathfrak{r}_1 \mathfrak{v}_1] + \frac{e_2}{c} \cdot \frac{1}{2}[\mathfrak{r}_2 \mathfrak{v}_2] + \cdots + \frac{e_n}{c} \cdot \frac{1}{2}[\mathfrak{r}_n \mathfrak{v}_n]. \tag{163a}$$

Jene umlaufenden Elektronen nennt Lorentz „Magnetisierungselektronen". Er sucht, indem er die Bestrebungen von Ampère und W. Weber wieder aufnimmt, die Magnetisierung des Körpers durch intramolekulare Bewegungen der Elektrizität zu erklären.

Der Beitrag jeder einzelnen Elektronenart zum magnetischen Momente bestimmt sich als Produkt aus seiner elektromagnetisch gemessenen Ladung und dem axialen Vektor $\frac{1}{2}[\mathfrak{r}\mathfrak{v}]$, der im Sinne der Punktmechanik als Flächengeschwindigkeit, bezogen auf den Mittelpunkt O des Moleküles, bezeichnet werden kann. Das magnetische Moment stellt sich auch hier als ein axialer Vektor dar, wenn anders die Elektrizität ein wirklicher Skalar ist.

Wir werden annehmen dürfen, daß die Umlaufsbewegungen der Elektronen, die zur Bildung magnetischer Momente Veranlassung geben, periodischer Art sind, und daß in einem physikalisch unendlich kleinen Zeitintervall eine große Zahl von Umläufen stattfindet. Rechnet man mit den über ein physikalisch unendlich kleines Zeitintervall erstreckten Mittelwerten, so wird das elektrische Moment $\mathfrak{p}$ unter diesen Umständen auch dann gleich Null sein, wenn z. B. ein negatives Elektron um das ruhende positive Elektron Umlaufsbewegungen ausführt; die periodische Schwankung des elektrischen Momentes

erfolgt dann so rasch, daß sie sich der Beobachtung entzieht, und es wird das Elektronenpaar dann nicht mehr als „Polarisationselektron", sondern ausschließlich als Magnetisierungselektron in Betracht kommen.

Es kann natürlich auch vorkommen, daß ein und dasselbe Molekül gleichzeitig Polarisations- und Magnetisierungs-Elektronen enthält.

Die Magnetisierungselektronen steuern nun ihrerseits einen Anteil zum Mittelwerte des Konvektionsstromes $\overline{\rho\mathfrak{v}}$ bei. Die Berechnung dieses Anteiles können wir auf diejenigen Regeln zurückführen, welche wir soeben zum Zwecke der Berechnung der mittleren, von den Polarisationselektronen herrührenden elektrischen Dichte entwickelt haben. Wir verstehen unter $\mathfrak{t}$ einen durchweg konstanten Hilfsvektor und bilden das Vektorprodukt aus ihm und dem magnetischen Momente $\mathfrak{m}$ entsprechend der Rechnungsregel δ (Bd. I, S. 452):

$$[\mathfrak{t}\mathfrak{m}] = \frac{e_1}{2c}\left\{\mathfrak{r}_1(\mathfrak{t}\mathfrak{v}_1) - \mathfrak{v}_1(\mathfrak{t}\mathfrak{r}_1)\right\} + \frac{e_2}{2c}\left\{\mathfrak{r}_2(\mathfrak{t}\mathfrak{v}_2) - \mathfrak{v}_2(\mathfrak{t}\mathfrak{r}_2)\right\} + \cdots$$

$$= \mathfrak{r}_1\left(\mathfrak{t}, \frac{e_1\mathfrak{v}_1}{c}\right) + \mathfrak{r}_2\left(\mathfrak{t}, \frac{e_2\mathfrak{v}_2}{c}\right) + \cdots + \mathfrak{r}_n\left(\mathfrak{t}, \frac{e_n\mathfrak{v}_n}{c}\right)$$

$$- \frac{1}{2c}\cdot\frac{d}{dt}\left\{e_1\mathfrak{r}_1(\mathfrak{t}\mathfrak{r}_1) + e_2\mathfrak{r}_2(\mathfrak{t}\mathfrak{r}_2) + \cdots + e_n\mathfrak{r}_n(\mathfrak{t}\mathfrak{r}_n)\right\}.$$

Sind nun, wie angenommen wurde, die Perioden der Umlaufsbewegungen der Elektronen so gering, daß in einem physikalisch unendlich kleinen Zeitintervalle eine große Zahl von Umläufen stattfindet, so fällt bei der Mittelwertsbildung über ein solches Intervall das zweite Glied fort; denn die Konfiguration der Ladungen im Moleküle bleibt im Mittel ungeändert. Die entstehende Gleichung

$$(164) \quad [\mathfrak{t}\mathfrak{m}] = \mathfrak{r}_1\left(\mathfrak{t}, \frac{e_1\mathfrak{v}_1}{c}\right) + \mathfrak{r}_2\left(\mathfrak{t}, \frac{e_2\mathfrak{v}_2}{c}\right) + \cdots + \mathfrak{r}_n\left(\mathfrak{t}, \frac{e_n\mathfrak{v}_n}{c}\right)$$

ist der Gleichung (161a) für das elektrische Moment des Moleküles an die Seite zu stellen. Dem Skalar e dort entspricht hier der Skalar $\left(\mathfrak{t}, \frac{e\mathfrak{v}}{c}\right)$. Derselbe genügt, falls der Vektor $\mathfrak{p}$

(vgl. 161a) für das betreffende Molekül gleich Null ist, der Bedingung

$$(164\text{a}) \qquad \left(\mathfrak{k}, \frac{e_1 \mathfrak{v}_1}{c}\right) + \left(\mathfrak{k}, \frac{e_2 \mathfrak{v}_2}{c}\right) + \cdots + \left(\mathfrak{k}, \frac{e_n \mathfrak{v}_n}{c}\right) = 0,$$

welche (161b) entspricht.

Führen wir nun den Vektor ein:

$$(164\text{b}) \qquad \mathfrak{M} = N'\mathfrak{m}' + N''\mathfrak{m}'' + \cdots,$$

welcher die von den verschiedenen Molekülgattungen herrührende, auf die Volumeinheit berechnete **Magnetisierung** darstellt, so entspricht der Vektor $[\mathfrak{k}\mathfrak{M}]$ vollkommen dem Vektor $\mathfrak{P}$ (vgl. 161c). Wie wir in (162a) aus $\mathfrak{P}$ den Mittelwert $\bar{\varrho}$ der elektrischen Dichte ableiteten, so können wir nunmehr aus dem Vektor $[\mathfrak{k}\mathfrak{M}]$ auf Grund der analogen Beziehung

$$\left(\mathfrak{k}, \frac{\overline{\varrho \mathfrak{v}}}{c}\right) = -\operatorname{div}[\mathfrak{k}\mathfrak{M}]$$

den Mittelwert des von den Magnetisierungselektronen herrührenden Konvektionsstromes ermitteln. Da $\mathfrak{k}$ ein vom Orte unabhängiger Vektor ist, so ergibt die Regel λ (Bd. I, S. 453)

$$-\operatorname{div}[\mathfrak{k}\mathfrak{M}] = \mathfrak{k}\operatorname{curl}\mathfrak{M}.$$

Da dieses für jede beliebige Richtung des Hilfsvektors $\mathfrak{k}$ gelten muß, so folgt

$$(164\text{c}) \qquad \{\overline{\varrho \mathfrak{v}}\}_m = c \cdot \operatorname{curl}\mathfrak{M}$$

als **Mittelwert des von den Magnetisierungselektronen herrührenden elektrischen Stromes.** Die Mittelwertsbildung bezieht sich dabei, wie aus den obigen Überlegungen folgt, auf physikalisch unendlich kleine Zeiten und physikalisch unendlich kleine Gebietsteile des Raumes. Der Strom (164c) genügt der Kontinuitätsbedingung, ohne daß eine parallel gehende zeitliche Änderung der Dichte der Elektrizität zu berücksichtigen wäre.

Wir schreiten nunmehr zur Summierung der Anteile, die von den verschiedenen Elektronenarten zur mittleren Dichte

der Elektrizität und des elektrischen Stromes beigesteuert werden. Aus (160) und (162a) folgt

$$\bar{\varrho} = \{\bar{\varrho}\}_l + \{\bar{\varrho}\}_p = \varrho - \operatorname{div} \mathfrak{P} = \varrho'. \tag{165}$$

Der erste Bestandteil, die von den Leitungselektronen herrührende Dichte, ist identisch mit der Dichte der wahren Elektrizität in der Maxwell-Hertzschen Theorie. In der Tat, die wahre Ladung eines Leiters ist diejenige, die nur durch einen Leitungsstrom abgeändert werden kann, und die, wenn ein solcher fehlt, auch dann konstant bleibt, wenn der Leiter in ein anderes Dielektrikum eingebettet wird. Die durch die Polarisation des Dielektrikums abgeänderte mittlere Dichte $\bar{\varrho}$ hingegen ist identisch mit der Dichte ϱ' der freien Elektrizität in der Maxwell-Hertzschen Theorie.

Als resultierender Mittelwert des elektrischen Stromes folgt aus (160, 162 und 164c)

$$\overline{\varrho \mathfrak{v}} = \{\overline{\varrho \mathfrak{v}}\}_l + \{\overline{\varrho \mathfrak{v}}\}_p + \{\overline{\varrho \mathfrak{v}}\}_m = \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + c \operatorname{curl} \mathfrak{M}. \tag{165a}$$

Der erste Bestandteil, der von den Leitungselektronen herrührt, ist auch für magnetisierte Leiter mit der Dichte des wahren Leitungsstromes in der Maxwell-Hertzschen Theorie identisch. Derselbe bestimmt die Änderung der wahren Ladung der Leiter. Die durch die Mitwirkung der Magnetisierungselektronen abgeänderte mittlere Dichte hingegen

$$\mathfrak{i}' = \mathfrak{i} + c \operatorname{curl} \mathfrak{M} \tag{165b}$$

ist nichts anderes als die Dichte des freien Stromes in der Maxwell-Hertzschen Theorie (Bd. I, Gl. 176, S. 240).

Wie ordnen sich nun die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ den Mittelwerten $\bar{\mathfrak{e}}$ und $\bar{\mathfrak{h}}$ zu, die im Eingange dieses Paragraphen in den Grundgleichungen (Ia bis IVa) der Elektronentheorie auftreten? Wir sehen sofort, daß wir der quellenfreien Verteilung des Vektors $\mathfrak{B}$ der magnetischen Induktion gerecht werden, wenn wir setzen

$$\mathfrak{B} = \bar{\mathfrak{h}}. \tag{166}$$

Alsdann führt (IIa) auf die zweite Hauptgleichung (Bd. I, Gl. 178, S. 245), bei Ausschluß eingeprägter Kräfte, wenn $\bar{\mathfrak{e}}$ mit $\mathfrak{E}$ identifiziert wird:

(166a) $$\mathfrak{E} = \bar{\mathfrak{e}}.$$

Die Elektronentheorie identifiziert die Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{E}$ der Maxwellschen Theorie mit den Mittelwerten der elektromagnetischen Vektoren $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{e}$, welche die Felder der einzelnen Elektronen kennzeichnen. Hier wird von vornherein ein Standpunkt eingenommen, welcher nicht die Hertz-Heavisidesche Analogie der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ einerseits, $4\pi\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ andererseits zugrunde legt. Die Symmetrie der elektrischen und magnetischen Größen wird von der Elektronentheorie aufgegeben; in ihren Grundgleichungen spielt bereits $\mathfrak{h}$ eine andere Rolle wie $\mathfrak{e}$, was daher rührt, daß zwar Elektrizität und elektrischer Konvektionsstrom, aber keineswegs Magnetismus und magnetischer Konvektionsstrom angenommen werden.

Die Einführung der Definitionen (166) und (166a) sowie des für die Stromdichte erhaltenen Mittelwertes (165a) in die erste Grundgleichung (Ia) ergibt

$$\operatorname{curl} \mathfrak{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \frac{4\pi \mathfrak{i}}{c} + 4\pi \operatorname{curl} \mathfrak{M}.$$

Die beiden ersten Glieder, der Verschiebungsstrom im Äther und der Polarisationsstrom im Körper, ergeben zusammen den Verschiebungsstrom der Maxwellschen Theorie. Definiert man nun weiter die Vektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$, wie folgt:

(166b) $$4\pi\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P},$$

(166c) $$\mathfrak{H} = \mathfrak{B} - 4\pi\mathfrak{M},$$

so wird die erste Hauptgleichung der Maxwellschen Theorie (Bd. I, Gl. 177a, S. 243) erfüllt. Aus (IIIa) folgt schließlich mit Rücksicht auf (165) und (166a, b) die von der Maxwellschen Theorie geforderte Beziehung zwischen der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ und der Dichte ϱ der wahren Elektrizität.

Die Lorentzsche Theorie definiert die beobachtbaren elektromagnetischen Vektoren durch (166) und (166a, b, c) und gelangt so zu den Hauptgleichungen der Maxwellschen Theorie für ruhende Körper:

$$\text{(Ib)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \frac{4\pi \mathfrak{i}}{c},$$

$$\text{(IIb)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t},$$

$$\text{(IIIb)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho,$$

$$\text{(IVb)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0.$$

Dabei identifiziert sie — das muß besonders betont werden — die Mittelwerte der Dichten der Elektrizität und des elektrischen Stromes, welche von den freien und von den gebundenen Elektronen herrühren, keineswegs mit ϱ und $\mathfrak{i}$. Vielmehr wird der Mittelwert der elektrischen Dichte mit der freien Dichte der Maxwell-Hertzschen Theorie identifiziert, der Mittelwert des Konvektionsstromes der Elektronen mit dem freien Strome, vermehrt um den an der Materie haftenden Anteil des Verschiebungsstromes (vgl. 165 und 165a, b).

Aus den Hauptgleichungen ergeben sich die Feldgleichungen der Maxwell-Hertzschen Theorie (Bd. I, § 66) durch Hinzufügung der Beziehungen, welche $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{B}$ verknüpfen. Die Elektronentheorie gelangt zu diesen Beziehungen, indem sie die Veränderungen betrachtet, welche die Lage und der Bewegungszustand der Elektronen infolge der Einwirkung äußerer Felder erfährt. Wir werden insbesondere für die Polarisationselektronen diese Betrachtungen in den beiden nächsten Paragraphen durchführen und werden zeigen, daß die Berücksichtigung der Trägheit der Elektronen zum Verständnis der Farbenzerstreuung und der magnetischen Drehung der Polarisationsebene führt.

Von eingeprägten Kräften haben wir bei der Ableitung der Hauptgleichungen abgesehen. Die Maxwellsche Theorie versteht unter eingeprägten elektrischen Kräften solche, welche

unabhängig von wahrnehmbaren elektromagnetischen Ursachen sind und mit irgendwelchen sonstigen physikalischen oder chemischen Zuständen des Körpers verknüpft sind (Bd. I, § 56). Nach der Elektronentheorie ist die eingeprägte Kraft eine äußere, an den Elektronen angreifende Kraft. Da nun nach den Grundhypothesen der Elektronentheorie nur elektromagnetische Kräfte es sind, welche an den Elektronen angreifen, so müßte man postulieren, daß die eingeprägten Kräfte auf die elektromagnetischen Kräfte verborgener Felder zurückgeführt würden. Dieses Ziel ist noch keineswegs erreicht. In vielen Fällen macht man, um zur Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Beobachtung zu gelangen, für die an den Elektronen angreifenden Kräfte geeignete Ansätze, ohne sie weiter elektrodynamisch zu begründen.

§ 29. Dispersion der elektromagnetischen Wellen.

Wir betrachten einen unmagnetisierbaren homogenen Isolator. Die für einen solchen geltenden Feldgleichungen werden in der Maxwellschen Theorie erhalten, indem $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{i}$ gleich Null und

$$(167) \qquad 4\pi\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}, \quad 4\pi\mathfrak{P} = (\varepsilon - 1)\mathfrak{E}$$

gesetzt werden. Die Dielektrizitätskonstante ε wird dabei als eine für den betreffenden Isolator charakteristische Konstante betrachtet, und die erhaltenen Feldgleichungen werden auch auf die Felder der Lichtwellen angewandt (Bd. I, § 75).

Die Elektronentheorie führt die elektrische Polarisation auf eine Verschiebung der gebundenen Elektronen zurück. Die Proportionalität der Momente der Polarisationselektronen zur elektrischen Feldstärke erklärt sie durch Annahme quasielastischer Kräfte, welche dieselben in ihre Gleichgewichtslagen zurückziehen. Solche quasielastischen Kräfte mußten wir schon früher annehmen (§ 9), um von der Existenz der in der Lichtemission sich kundgebenden Eigenschwingungen Rechenschaft zu geben. Die Eigenschwingungen ergaben sich ohne weiteres aus der Annahme quasielastischer Kräfte und aus der trägen Masse der Elektronen.

Nun waren bekanntlich durch Annahme von Eigenschwingungen in den Molekülen der lichtbrechenden Körper von Sellmeier, Ketteler und Helmholtz die Erscheinungen der Dispersion erklärt worden. Man gelangte zu einer elektromagnetischen Theorie der Dispersion, indem man der trägen Masse der von den Lichtwellen in Schwingungen versetzten elektrischen Teilchen Rechnung trug. Wir werden bei der Darstellung der Elektronentheorie der Dispersion uns insbesondere an H. A. Lorentz[29]), P. Drude[9]) und M. Planck[44]) anschließen.

Wir betrachten eine ebene homogene elektromagnetische Welle, welche in dem homogenen isotropen Dielektrikum parallel der x-Achse fortschreitet; die Welle sei geradlinig parallel der z-Achse polarisiert, d. h. die magnetischen Vektoren $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$ fallen in die z-Achse und die elektrischen, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$, in die y-Achse. Die Hauptgleichungen (Ib, IIb) ergeben

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t},$$

mithin nach Elimination von $\mathfrak{H}_z$

$$\text{(167a)} \qquad \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{D}_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2}.$$

Für monochromatische Wellen von der Frequenz ν wird nun die Abhängigkeit der Komponenten $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{D}_y$ von x und t durch den komplexen Faktor

$$e^{i\nu\left(t-\frac{nx}{c}\right)}$$

gekennzeichnet sein, wo $\frac{c}{n}$ die Geschwindigkeit der Wellen, n demnach den Brechungsindex des Körpers angibt.

Aus (167a) folgt für diese Wellen:

$$4\pi\mathfrak{D}_y = n^2\mathfrak{E}_y.$$

Akzeptiert man die von der Maxwellschen Theorie behauptete Proportionalität von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ (Gl. 167), so gelangt man zur Maxwellschen Relation $n^2 = \varepsilon$ zurück (Bd. I, Gl. 205d,

S. 317). Wenn wir auch diese Beziehung nicht als allgemein gültig annehmen, so müssen wir doch fordern, daß bei gegebener Frequenz ν

(167b) $$4\pi\mathfrak{D} = n^2\mathfrak{E}, \quad 4\pi\mathfrak{P} = (n^2 - 1)\mathfrak{E}$$

gelte, wo n eine zunächst noch unbekannte Konstante ist. Denn nur dann folgt aus den Hauptgleichungen auf Grund von (167a) das von der Erfahrung bestätigte Ergebnis, daß in einem homogenen isotropen durchsichtigen Körper monochromatische Lichtwellen von gegebener Frequenz nach allen Richtungen mit der gleichen, von der Lichtstärke unabhängigen Geschwindigkeit sich fortpflanzen. Der Brechungsindex n, der in (167b) eingeht, kann allerdings von der Frequenz der Schwingungen, d. h. von der Wellenlänge des Lichtes abhängen; diese Abhängigkeit bedingt eben Farbenzerstreuung.

Die Elektronentheorie bringt den Brechungsindex in Zusammenhang mit der Zahl und den Eigenschaften der Polarisationselektronen, indem sie die elektrischen Momente derselben mit der Feldstärke verknüpft. Sie geht dabei aus von der Schwingungsgleichung (56, 56a) der freien Eigenschwingungen eines Dipols, in deren rechte Seite die äußere elektromagnetische Kraft einzuführen ist. Es wird

(168) $$\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} + k^2\mathfrak{p} = \frac{e^2}{m}\mathfrak{F}^a.$$

Wir nehmen nur eine einzige Elektronenart als mitschwingend an, und zwar sei p die Zahl der Elektronen im Molekül, N die Zahl der Moleküle im cm^3. Die Polarisation der Volumeinheit wird dann gemäß (161c)

(168a) $$\mathfrak{P} = Np \cdot \mathfrak{p}.$$

Auf den Fall verschiedener Elektronenarten kann man die Entwickelungen ohne Schwierigkeit ausdehnen.

Die auf die Einheit der Ladung berechnete äußere Kraft ist

(168b) $$\mathfrak{F}^a = \mathfrak{e}^a + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{h}^a],$$

wobei unter $\mathfrak{e}^a$ und $\mathfrak{h}^a$ der elektrische und der magnetische Vektor des äußeren Feldes im Äther zu verstehen sind. Den

zweiten Term in (168b) pflegt man, wenn kein konstantes äußeres magnetisches Feld mitwirkt und nur das magnetische Feld der Lichtwellen selbst in Frage kommt, gegen den ersten zu vernachlässigen, indem man die Geschwindigkeit der schwingenden Elektronen als klein gegen die Lichtgeschwindigkeit betrachtet.

Es folgt aus (168) und (168a, b):

$$\frac{d^2\mathfrak{P}}{dt^2} + k^2\mathfrak{P} = Np \cdot \frac{e^2}{m} \cdot \overline{\overline{\mathfrak{e}^a}}. \tag{169}$$

Dabei ist unter $\overline{\overline{\mathfrak{e}^a}}$ ein Mittelwert des Vektors $\mathfrak{e}^a$ zu verstehen; derselbe ist jedoch keineswegs mit dem Mittelwert $\overline{\mathfrak{e}} = \mathfrak{E}$ des vorigen Paragraphen zu verwechseln. Der Mittelwert $\overline{\mathfrak{e}}$ bezog sich nämlich auf ein physikalisch unendlich kleines Volumelement des Raumes; der Mittelwert $\overline{\overline{\mathfrak{e}^a}}$ ist nur für diejenigen Raumpunkte zu bilden, in welchen sich mitschwingende Elektronen befinden. Auch handelt es sich nicht um den totalen Wert des Vektors $\mathfrak{e}$, vielmehr ist in $\mathfrak{e}^a$ das vom Elektron selbst erregte Feld fortgefallen. Die Berechnung des Mittelwertes $\overline{\overline{\mathfrak{e}^a}}$ erfordert einige Überlegung.

Wir legen um den Punkt, für welchen $\mathfrak{e}^a$ berechnet werden soll, eine Kugel mit dem physikalisch unendlich kleinen Radius R; es heißt das, es soll R klein gegen die Wellenlänge sein und doch die Kugel eine große Zahl von Elektronen einschließen. Da R klein gegen die Wellenlänge ist, so werden innerhalb der Kugel, und auch auf ihrer Oberfläche, die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{P}$ konstant sein. Zu dem Vektor $\mathfrak{e}^a$ werden nun erstens diejenigen Elektronen einen Beitrag liefern, die innerhalb der Kugel sich befinden, und zweitens diejenigen außerhalb der Kugel. Den letztgenannten Bestandteil der elektrischen Kraft bestimmen wir, indem wir aus dem Innern der Kugel die Elektronen fortgeschafft denken; nach Fortschaffung aller Elektronen aus dem Innern der Kugel weicht das Feld im Innern von dem Felde $\mathfrak{E}$ der Lichtwellen im Körper nur aus dem Grunde ab, weil sich jetzt auf ihrer Oberfläche eine Schicht freier Ladungen befindet. Die Ein-

wirkung dieser Schicht können wir, da der Radius der Kugel klein gegen die Wellenlänge ist, auf Grund elektrostatischer Betrachtungen ermitteln. Wir hatten in Bd. I, § 48 eine ähnliche Aufgabe gelöst; wir hatten das von einer homogen polarisierten Kugel erregte Feld bestimmt und es im Innern gleich $-\frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}$ gefunden (Gl. 144b, S. 164). Nun ist die Feldstärke durch die freien Ladungen bestimmt; in dem vorliegenden Falle, wo außerhalb der Kugel die konstante Polarisation $\mathfrak{P}$ herrscht und das Innere der Kugel nicht polarisiert ist, ist die Dichte der freien Elektrizität auf der Kugelfläche offenbar die entgegengesetzte wie in dem damals behandelten Falle, wo das Kugelinnere homogen polarisiert, das Äußere aber nicht polarisiert war. Es gibt demnach

$$\mathfrak{E} + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}$$

den Wert von $\mathfrak{e}^a$ an, den man erhält, wenn man diejenigen Kräfte nicht berücksichtigt, die von den Elektronen innerhalb der Kugel herrühren. Für den Mittelwert der Summe dieser von den Polarisationselektronen der benachbarten Moleküle ausgeübten Kräfte setzt nun H. A. Lorentz[29]) $4\pi s\mathfrak{P}$, wo s eine Konstante bedeutet, und erhält so

$$\overline{\overline{\mathfrak{e}^a}} = \mathfrak{E} + 4\pi\left(\frac{1}{3} + s\right)\mathfrak{P}. \tag{169a}$$

Für feste Körper, bei denen man eine geordnete Lagerung der Moleküle und Elektronen anzunehmen hat, wird im allgemeinen eine von den Momenten der benachbarten Moleküle und Elektronen herrührende Kraft zu berücksichtigen sein. Bei Flüssigkeiten und Gasen hingegen, wo regellose Änderungen in der Gruppierung der Moleküle stattfinden, wird es gestattet sein, mit M. Planck[44]) anzunehmen, daß die Einwirkungen der innerhalb der Kugel befindlichen Elektronen sich im Mittel aufheben, und s demnach gleich Null zu setzen. Wir ziehen es indessen vor, die Konstante s beizubehalten. Wir umfassen dann auch die Theorie von P. Drude[9]), in welcher $\overline{\overline{\mathfrak{e}^a}}$ einfach

mit der Feldstärke $\mathfrak{E}$ der Lichtwellen identifiziert wird; der Drudesche Ansatz geht aus dem Lorentzschen hervor, indem

$$s = -\frac{1}{3}$$

gesetzt wird.

Unter Annahme rein periodischer Schwingungen von der Frequenz ν folgt aus (169) und (169a)

$$(169\text{b})\qquad (k^2 - \nu^2)\mathfrak{P} = Np \cdot \frac{e^2}{m}\left\{\mathfrak{E} + 4\pi\left(\frac{1}{3} + s\right)\mathfrak{P}\right\}.$$

Hieraus, in Verbindung mit (167b), erhalten wir

$$(k^2 - \nu^2) \cdot (n^2 - 1) = 4\pi\, Np \cdot \frac{e^2}{m}\left\{1 + (n^2 - 1)\left(\frac{1}{3} + s\right)\right\}.$$

Die Konstante k der Schwingungsgleichung (168) ist nichts anderes als die Frequenz der Eigenschwingungen der Polarisationselektronen. Führen wir statt der Frequenzen k, ν der Eigenschwingungen und der erzwungenen Schwingungen deren im leeren Raume gemessene Wellenlängen ein:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{k}, \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\nu},$$

so wird

$$(170)\qquad \frac{1}{n^2 - 1} + \frac{1}{3} + s = \frac{1}{\gamma}\left\{\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right\},$$

wo

$$(170\text{a})\qquad \gamma = \frac{Npe^2}{\pi c^2 m}$$

gesetzt ist.

Die Dispersionsformel (170) drückt die Änderung des Brechungsindex n mit der Wellenlänge λ aus. Setzt man $s = 0$, so wird

$$(170\text{b})\qquad \frac{n^2 + 2}{n^2 - 1} = \frac{3}{\gamma}\left\{\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right\}.$$

Da γ der Zahl N der Moleküle proportional ist, so muß bei einer Dichteänderung des Körpers für Licht bestimmter Farbe die Funktion $(n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ des Brechungsexponenten der Dichte proportional variieren, wenn anders die Zahl der mitschwingenden Elektronen im Molekül und die Wellenlänge

ihrer Eigenschwingung bei der Dichteänderung sich nicht ändern. Dieses *Lorentz-Lorenzsche Gesetz* hat sich vielfach bestätigt gefunden. Es hat sich auch ergeben, daß für Mischungen die Größe $(n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ sich aus den Beiträgen der Komponenten nach der Mischungsregel berechnen läßt. Auch auf chemische Verbindungen hat man diese Regel angewandt und in vielen Fällen bestätigt gefunden. Man darf in solchen Fällen annehmen, daß die Polarisationselektronen am Atome haften, und daß ihre Zahl und ihre Eigenschwingung bei der chemischen Bindung der Atome erhalten bleiben.

Wir schreiten zur Diskussion der Dispersionsformel (170). Wir unterscheiden dabei verschiedene Fälle.

A) λ_0 klein gegen λ. Hier kommt auf der rechten Seite von (170) das mit λ veränderliche Glied nicht in Betracht, und es ergibt sich für die linke Seite ein positiver, konstanter Wert. Eigenschwingungen, die sehr weit nach der ultravioletten Seite hin von dem betrachteten Spektralbereich entfernt liegen, ergeben demnach zwar eine Brechung, aber keine Dispersion; das hängt damit zusammen, daß die Trägheit der mitschwingenden Teilchen nicht in Betracht kommt, wenn die Frequenz klein gegen die Frequenz der Eigenschwingungen ist.

B) $\lambda_0 < \lambda$. Die rechte Seite von (170) ist positiv und nimmt mit abnehmendem λ ab. Es nimmt daher, wenn man sich von der roten Seite her der Wellenlänge λ_0 der Eigenschwingung nähert, der Brechungsindex zu, d. h. es liegt der Fall der *normalen Dispersion* vor.

C) $\lambda_0 < \lambda$. Beim Durchgang durch den Wert $\lambda = \lambda_0$ wechselt die rechte Seite von (170) das Vorzeichen, sie wird negativ und nimmt, bei weiterem Fortschreiten zu kleineren Wellenlängen, dem Betrage nach zu. Es muß demnach, nach Drude $\left(s = -\frac{1}{3}\right)$ genau, nach Lorentz und Planck ungefähr bei der Wellenlänge der Eigenschwingung, $n^2 - 1$ von beträchtlichen positiven zu negativen Werten übergehen. Die Wellenlängen, die auf der violetten Seite der Eigenschwingung liegen, werden also schwächer gebrochen als die auf der roten Seite

liegenden. So erklärt man die anomale Dispersion. Beim weiteren Fortschreiten nach der violetten Seite des Spektrums nimmt der Brechungsindex wieder zu, indem er dem Werte 1 zustrebt.

D) λ_0 groß gegen λ. Der Wert 1 des Brechungsindex ist nahezu erreicht. Die Eigenschwingung beeinflußt den Brechungsindex überhaupt nicht mehr; es schwingen die Elektronen nicht mehr mit.

Man wird hiernach aus der Gleichheit der Brechungsindizes eines Körpers für zwei verschiedene Wellenlängen schließen dürfen, daß zwischen diesen beiden Wellenlängen keine Eigenschwingung der Elektronen liegt. Insbesondere wird aus der Übereinstimmung des Quadrates des Brechungsexponenten für sichtbares Licht mit der Dielektrizitätskonstante, die beispielsweise bei Luft und Wasserstoff festgestellt ist, zu schließen sein, daß im ultraroten Spektralgebiete keine Eigenschwingungen liegen. P. Drude, der in seiner zweiten Arbeit über Dispersion[9]) das Beobachtungsmaterial in umfassender Weise vom Standpunkte der Elektronentheorie aus diskutiert, kommt zu dem Schluße, daß die ultraroten Eigenschwingungen den trägeren positiven Elektronen, die ultravioletten den mit weit geringerer Trägheit behafteten negativen Elektronen zuzuschreiben sind. Die Dispersion des Wasserstoffes wird man hiernach auf die Anwesenheit negativer Elektronen zurückzuführen suchen, deren Eigenschwingungen im Ultravioletten liegen, und wird mit Rücksicht auf die einfache Bauart der H_2-Moleküle die Annahme einer einzigen schwingungsfähigen Elektronenart hier als berechtigt ansehen dürfen.

Stellt man mit H. A. Lorentz die Kettelerschen Messungen an Wasserstoff von 0° Celsius und Atmosphärendruck, wo n nur wenig größer ist als 1, durch die Formel dar:

$$\frac{n^2+2}{n^2-1} = \frac{3}{2(n-1)} = 10\,707 - \frac{0{,}0739 \cdot 10^{-5}}{\lambda^2},$$

so ergiebt die Vergleichung mit (170b) für Wasserstoff

$$\frac{3}{\gamma} = 0{,}0739 \cdot 10^{-5}.$$

Hieraus und aus (170a) läßt sich die Zahl p der Polarisationselektronen im H_2-Moleküle berechnen

Es ist die Dichte eines Körpers

$$d = N \cdot M \cdot m_H,$$

wo M sein Molekulargewicht, m_H aber die Masse des Wasserstoffatomes ist.

Es folgt demnach, mit Rücksicht auf Gleichung (1),

$$\frac{eN}{c} = \frac{e}{c m_H} \cdot \frac{d}{M} = 9660 \cdot \frac{d}{M},$$

und daher aus (170a)

$$\gamma = p \cdot \eta \cdot \frac{9660}{\pi} \cdot \frac{d}{M}. \tag{170c}$$

Es läßt sich auf Grund dieser Gleichung das Produkt von Zahl p und spezifischer Ladung η der negativen Elektronen aus der Konstante γ der Dispersionsformel berechnen, falls nur eine einzige Elektronenart ins Spiel kommt. Für ideale Gase speziell ist allgemein

$$\frac{M}{d} = 2{,}24 \cdot 10^4,$$

so daß

$$p \cdot \eta = 7{,}285 \cdot \gamma \tag{170d}$$

wird.

Für Wasserstoff folgt aus dem angegebenen Werte von γ

$$p \cdot \eta = 2{,}96 \cdot 10^7.$$

Da p eine ganze Zahl sein muß, so kommt man dem aus der Ablenkung der Kathodenstrahlen berechneten Werte von η am nächsten, wenn man mit P. Drude setzt:

$$p = 2, \quad \eta = 1{,}48 \cdot 10^7. \tag{170e}$$

Es sind also im H_2-Moleküle zwei Polarisationselektronen anzunehmen.

Wir haben der Absorption des Lichtes bei Wellenlängen, welche den Eigenschwingungen der Polarisationselektronen entsprechen, nicht Rechnung getragen. Zur Darstellung der

Absorption und auch zur genaueren Verfolgung der Dispersion durch den Absorptionsstreifen hindurch wäre die Einführung von Dämpfungsgliedern in die Schwingungsgleichung (168) notwendig. Man kann diese Einführung in verschiedener Weise vornehmen, entweder, indem man mit P. Drude eine der Geschwindigkeit proportionale Reibung ähnlich wie in der gewöhnlichen Mechanik annimmt, oder indem man mit M. Planck auch hier die Dämpfungsglieder als Rückwirkung der Strahlung auffaßt, wobei diese der zweiten Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit proportional werden (vgl. § 9, Gl. 58b). In beiden Fällen erklärt sich das Auftreten derselben Linien im Emissionsspektrum und im Absorptionsspektrum auf Grund der allgemeinen Schwingungslehre; die Polarisationselektronen sprechen auf diejenigen Wellen an, welche mit ihren Eigenschwingungen in Resonanz sind.

Wir haben hier nur eine einzige Elektronenart und eine einzige Eigenschwingung angenommen. Man kann die mathematischen Entwickelungen ohne weiteres auf den Fall beliebig vieler Eigenschwingungen ausdehnen, indem man jede Eigenschwingung einer anderen Elektronenart zuschreibt. Es ist aber die Frage, ob diese Darstellung der Wirklichkeit entspricht. Dieselben ungelösten Probleme, welche uns die Emissionsspektra darboten (vgl. § 9), treten uns auch in der Theorie der Absorptionsspektren entgegen.

§ 30. Magnetische Drehung der Polarisationsebene.

In einem früheren Abschnitte (§ 10) hatten wir von den Veränderungen gesprochen, welche die Spektrallinien im magnetischen Felde erfahren. Im einfachsten Falle des normalen Zeeman-Effektes werden parallel den magnetischen Kraftlinien zwei zirkularpolarisierte Wellen ausgesandt; der Unterschied ihrer Frequenzen ist gleich der spezifischen Ladung der Elektronen, multipliziert mit der magnetischen Feldstärke (Gl. 60d). Diese Veränderung der Eigenschwingungen der Elektronen, die sich in den Emissionsspektren zeigt, kommt nun auch in den Absorptionsspektren zur Geltung. An Stelle

einer einzigen Linie des Absorptionsspektrums treten bei Einwirkung eines der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes parallelen magnetischen Feldes deren zwei, in denen die rechts- bzw. linkszirkulare Welle absorbiert wird. Dem direkten Zeeman-Effekt der Emission tritt der inverse Zeeman-Effekt der Absorption gegenüber. Die Theorie dieser Erscheinung ist von W. Voigt[64]) im Anschlusse an die Drudesche Theorie der Dispersion entwickelt worden. Die dabei sich ergebenden Einzelheiten des Phänomens hat die Beobachtung vielfach bestätigt.

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, daß die Eigenschwingungen der Elektronen auch außerhalb des Resonanzbereiches von Einfluß sind, daß sie nämlich zu einer Dispersion des Lichtes Veranlassung geben. Beim Hinzutreten eines magnetischen Feldes werden nun die Frequenzen der rechts- und linkszirkularen Eigenschwingungen der Elektronen in verschiedener Weise abgeändert. Damit hängt es zusammen, daß parallel den magnetischen Kraftlinien die rechts- und linkszirkularen Komponenten des einfallenden Lichtes mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortgepflanzt werden, und daß so eine Drehung der Polarisationsebene zustande kommt. Die Theorie der magnetischen Drehung der Polarisationsebene wollen wir in diesem Paragraphen behandeln.

Wir schließen Leitungselektronen und Magnetisierungselektronen aus. Die beiden Hauptgleichungen (Ib, IIb) des § 28 ergeben dann

$$\text{(171)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t},$$

$$\text{(171a)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t},$$

dabei ist nach (166b) zu setzen

$$\text{(171b)} \qquad 4\pi\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P}.$$

Dieses Gleichungssystem ist durch Einführung der Beziehung zu ergänzen, welche den Vektor $\mathfrak{P}$, die auf die Volumeinheit bezogene elektrische Polarisation, mit der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ verknüpft. Wir haben im vorigen Paragraphen, von

der Schwingungsgleichung (168) ausgehend, diese Beziehung abgeleitet, wobei wir indessen von einer Einwirkung magnetischer Kräfte auf die Elektronen abgesehen haben. Wir haben jetzt den Einfluß eines konstanten magnetischen Feldes auf die Elektronenschwingungen in Betracht zu ziehen; wir wollen dasselbe der z-Achse parallel annehmen und den Betrag der Feldstärke mit H bezeichnen, zum Unterschiede von der periodisch veränderlichen Feldstärke $\mathfrak{H}$ der Lichtwellen. Die Differentialgleichungen, welche für die Komponenten von $\mathfrak{p}$ gelten, gehen aus den Gleichungen (59a, b, c) der Eigenschwingungen hervor, indem die äußeren elektrischen Kräfte in der im vorigen Paragraphen dargelegten Weise eingeführt werden. An Stelle der Gleichungen (169, 169a) treten dann die folgenden:

$$(171c)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\mathfrak{P}_x}{dt^2} + \eta H \dfrac{d\mathfrak{P}_y}{dt} + k^2\mathfrak{P}_x = \dfrac{Npe^2}{m}\left\{\mathfrak{E}_x + 4\pi\left(\frac{1}{3} + s\right)\mathfrak{P}_x\right\}, \\ \dfrac{d^2\mathfrak{P}_y}{dt^2} - \eta H \dfrac{d\mathfrak{P}_x}{dt} + k^2\mathfrak{P}_y = \dfrac{Npe^2}{m}\left\{\mathfrak{E}_y + 4\pi\left(\frac{1}{3} + s\right)\mathfrak{P}_y\right\}, \end{cases}$$

$$(171d)\quad \frac{d^2\mathfrak{P}_z}{dt^2} + k^2\mathfrak{P}_z = \frac{Npe^2}{m}\left\{\mathfrak{E}_z + 4\pi\left(\frac{1}{3} + s\right)\mathfrak{P}_z\right\}.$$

Wir wollen monochromatische transversale Lichtwellen betrachten, welche sich parallel den Magnetkraftlinien fortpflanzen. Wir suchen demgemäß die Gleichungen durch Annahme homogener ebener Wellen zu erfüllen, in denen die Feldstärken von t und z in der Weise abhängen, wie es durch den komplexen Faktor $e^{i\nu\left(t - \frac{nz}{c}\right)}$ zum Ausdruck gebracht wird. Die longitudinalen Komponenten $\mathfrak{H}_z$, $\mathfrak{E}_z$ und $\mathfrak{P}_z$ sind dabei gleich Null zu setzen, und es wird, gemäß (171, 171b)

$$n\mathfrak{H}_y = \mathfrak{E}_x + 4\pi\mathfrak{P}_x, \quad -n\mathfrak{H}_x = \mathfrak{E}_y + 4\pi\mathfrak{P}_y,$$

während aus (171a) folgt

$$n\mathfrak{E}_y = -\mathfrak{H}_x, \quad n\mathfrak{E}_x = \mathfrak{H}_y.$$

Durch Elimination von $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$ folgt

$$(172)\quad 4\pi\mathfrak{P}_x = (n^2 - 1)\mathfrak{E}_x, \quad 4\pi\mathfrak{P}_y = (n^2 - 1)\mathfrak{E}_y,$$

welches auch immer der Polarisationszustand der Welle sein mag.

Wir wollen nun unter n' bzw. n'' die Brechungsindizes der rechts- bzw. linkszirkularpolarisierten Wellen verstehen, welche sich im magnetischen Felde fortpflanzen.

Bei Fortpflanzung parallel der z-Achse gilt

$$\mathfrak{H}_y = \pm i \mathfrak{H}_x \tag{172a}$$

und daher

$$\mathfrak{E}_y = \pm i \mathfrak{E}_x, \quad \mathfrak{P}_y = \pm i \mathfrak{P}_x, \tag{172b}$$

wobei das obere Vorzeichen sich auf die rechtszirkulare, das untere auf die linkszirkulare Schwingung bezieht; erstere entspricht einer negativen, letztere einer positiven Drehung um die z-Achse. Die Einführung von (172) und (172b) in (171c) ergibt

$$(n^2 - 1)\left\{k^2 - \nu^2 \mp \nu\eta H\right\} = \frac{4\pi N p e^2}{m}\left\{1 + (n^2 - 1)\left(\frac{1}{3} + s\right)\right\}$$

oder

$$\frac{1}{n^2 - 1} + \frac{1}{3} + s = \frac{m}{4\pi N p e^2}\left\{k^2 - \nu^2 \mp \nu\eta H\right\}. \tag{173}$$

Diese erweiterte Dispersionsgleichung bestimmt die Brechungsindizes und somit die Geschwindigkeiten der beiden den Magnetkraftlinien parallel fortgepflanzten zirkularpolarisierten Wellen. Der Klammerausdruck auf der rechten Seite verschwindet für diejenigen Frequenzen ν der Lichtschwingungen, welche den durch das magnetische Feld abgeänderten Frequenzen der Eigenschwingungen der Elektronen entsprechen (Gl. 60b). Da wir indessen die Absorptionsglieder der Schwingungsgleichungen gestrichen haben, so müssen wir uns ein Eingehen auf die innerhalb des Absorptionsstreifens zu beobachtenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten versagen und uns auf solche Schwingungszahlen beschränken, welche von denjenigen der Eigenschwingungen einigermaßen entfernt sind. Hier bedingt der Einfluß des magnetischen Feldes nur eine geringe Abänderung des Brechungsindex.

Verstehen wir unter n die gemeinsame Geschwindigkeit der beiden Wellen vor Erregung des magnetischen Feldes, welche bestimmt ist durch

$$\text{(173a)} \qquad \frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{3} + s = \frac{m}{4\pi N p e^2}\left\{k^2 - \nu^2\right\},$$

so darf gesetzt werden

$$(n' - n)\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{n^2-1}\right) = \frac{1}{n'^2-1} - \frac{1}{n^2-1} = -\nu\eta H \cdot \frac{m}{4\pi N p e^2},$$

$$(n'' - n)\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{n^2-1}\right) = \frac{1}{n''^2-1} - \frac{1}{n^2-1} = +\nu\eta H \cdot \frac{m}{4\pi N p e^2}.$$

Da andererseits aus (173a) folgt:

$$\frac{dn}{d\nu}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{n^2-1}\right) = -2\nu\frac{m}{4\pi N p e^2},$$

so erhalten wir

$$\text{(173b)} \qquad \begin{cases} n' = n + \frac{1}{2}\eta H \frac{dn}{d\nu}, \\ n'' = n - \frac{1}{2}\eta H \frac{dn}{d\nu}. \end{cases}$$

Durch die Differenz der Brechungsindizes der rechts- und linkszirkularpolarisierten Welle bestimmt sich jetzt die Drehung der Polarisationsebene. Diese Ebene ist durch den magnetischen Vektor $\mathfrak{H}$ der Lichtwelle gegeben, welche durch Superposition zweier rechts- bzw. linkszirkularer Wellen gleicher Amplitude entsteht.

Wir können mit Rücksicht auf (172a) und (173b) schreiben:

$$\mathfrak{H}_x = \frac{A}{2}\left\{ e^{i\nu\left(t - \frac{n'z}{c}\right)} + e^{i\nu\left(t - \frac{n''z}{c}\right)}\right\} = A e^{i\nu\left(t - \frac{nz}{c}\right)} \cos\left(\frac{\nu(n' - n'')z}{2c}\right),$$

$$\mathfrak{H}_y = \frac{A}{2}\left\{ i e^{i\nu\left(t - \frac{n'z}{c}\right)} - i e^{i\nu\left(t - \frac{n''z}{c}\right)}\right\} = A e^{i\nu\left(t - \frac{nz}{c}\right)} \sin\left(\frac{\nu(n' - n'')z}{2c}\right).$$

Wir können demgemäß den Vorgang, der durch Superposition der beiden zirkularpolarisierten Wellen entsteht, auffassen als eine Fortpflanzung einer geradlinig polarisierten Welle mit der ursprünglichen, durch den Brechungsindex n gekennzeichneten Geschwindigkeit, verbunden mit einer Drehung

der Polarisationsebene. Die Polarisationsebene, die für $z = 0$ in die (xz)-Ebene fiel, ist nach Durchlaufung der Strecke z um den Winkel

$$\omega = \frac{\nu(n' - n'')z}{2c} \tag{173c}$$

in positivem Sinne um die z-Achse gedreht. Die sogenannte „Rotationskonstante" R, welche durch

$$\omega = RzH \tag{174}$$

definiert ist, folgt aus (173b):

$$R = \frac{\eta}{2c}\frac{\nu\, dn}{d\nu}. \tag{174a}$$

Da sich im vorigen Paragraphen der Differentialquotient des Brechungsindex n nach der Frequenz ν außerhalb des Absorptionsstreifens stets positiv ergeben hat, und da η eine positive den Betrag der spezifischen Ladung der negativen Elektronen anzeigende Konstante ist, so findet die Drehung der Polarisationsebene in positivem Sinne um die mit der magnetischen Feldrichtung zusammenfallende Fortpflanzungsrichtung des Lichtes statt. Es erfolgt also die Drehung der Polarisationsebene im Sinne der elektrischen Ströme, welche den Elektromagneten erregen. Wird der Strom kommutiert, so daß die Richtung des magnetischen Feldes sich umkehrt und nun der Fortpflanzungsrichtung entgegen gerichtet ist, so kehrt sich auch der Drehsinn der Polarisationsebene um. Behält hingegen das magnetische Feld seine Richtung im Raume bei, während die Strahlrichtung durch Reflexion umgekehrt wird, so geht die Drehung im Raume in demselben Sinne weiter.

Die obige Regel über den Drehsinn der Polarisationsebene gilt natürlich nur dann, wenn die Voraussetzungen zutreffen, aus der wir sie abgeleitet haben, d. h. wenn die magnetische Drehung wirklich auf die Schwingungen der negativen Elektronen allein zurückzuführen ist, und wenn Magnetisierungselektronen ausgeschlossen sind. Bei ferromagnetischen Körpern, z. B. bei Lösungen von Eisensalzen, gilt sie nicht immer.

Ebensowenig dürfte sie zutreffen, wenn die ultraroten Eigenschwingungen der positiven Elektronen für die Drehung wesentlich in Betracht kämen, was allerdings infolge ihrer geringen spezifischen Ladung kaum anzunehmen ist.

Wir können (174a) auch schreiben

$$R = -\frac{\eta}{2c}\lambda\frac{dn}{d\lambda}. \tag{174b}$$

Ist die Dispersionskurve gegeben, so kann hieraus die magnetische Drehung und ihre Abhängigkeit von der Wellenlänge ermittelt werden. Auf diesen Zusammenhang hat H. Becquerel[4]) hingewiesen; er besteht in manchen Fällen wirklich, wie er sich denn auch aus der allgemeineren Theorie von W. Voigt[64]) für den speziellen Fall eines einzigen Absorptionsstreifens ergibt. Die von der Elektronentheorie geforderte Bedeutung der multiplikativen Konstanten der Formel (174b) gestattet es, aus der beobachteten magnetischen Drehung die spezifische Ladung der schwingenden Elektronen zu berechnen. So findet L. H. Siertsema[54]) z. B. für Wasserstoff den Wert

$$\eta = 1{,}77 \cdot 10^7, \tag{174c}$$

welcher mit den aus der Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen und Becquerelstrahlen und aus dem Zeeman-Effekt ermittelten Werten der spezifischen Ladung noch besser stimmt als der im vorigen Paragraphen aus der Dispersion des Wasserstoffes abgeleitete Wert. Für die anderen untersuchten Körper erhält allerdings Siertsema durchweg kleinere Werte von η.

§ 31. **Magnetisierung.**

Wie die Elektronentheorie die Beziehungen, welche zwischen der elektrischen Polarisation $\mathfrak{P}$ und der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ bestehen, durch geeignete Annahmen über die Eigenschaften der Polarisationselektronen zu veranschaulichen sucht, so muß sie bestrebt sein, die zwischen der Magnetisierung $\mathfrak{M}$ und der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ obwaltenden Beziehungen auf die Mitwirkung der Magnetisierungselektronen zurückzuführen. Diese Magnetisierungselektronen sind nahe verwandt

den Molekularströmen, durch welche Ampère und Weber die magnetischen Eigenschaften der Körper zu erklären suchen. Ob wirklich der Paramagnetismus und der Diamagnetismus sich auf umlaufende oder rotierende Elektronen zurückführen läßt, ist von W. Voigt[65]) und P. Langevin[25]) untersucht worden.

W. Weber hat den Diamagnetismus auf die Molekularströme zurückgeführt, welche beim Entstehen eines magnetischen Feldes in widerstandslosen Bahnen induziert werden sollen. Dem entsprechen nach P. Langevin die Umlaufsbewegungen der Elektronen, welche im Innern der Moleküle beim Entstehen magnetischer Felder erregt werden; dieselben ergeben stets eine diamagnetische Erregung. Größere Schwierigkeiten bietet die Erklärung des Paramagnetismus; hier sind die Stöße und die sonstigen Wechselwirkungen der Moleküle heranzuziehen, und es ist die mittlere Orientierung der Magnetisierungselektronen in einem gegebenen Felde nach den Methoden der Kinetik zu behandeln; für diese Auffassung spricht der Umstand, daß, speziell für Gase, der Paramagnetismus von der Temperatur abhängt, im Gegensatz zu dem von der Temperatur nicht beeinflußten Diamagnetismus.

Zur Deutung mancher magnetooptischer Erscheinungen reicht die Einführung der Polarisationselektronen aus, wie wir im vorigen Paragraphen dargelegt haben. Gewisse magnetooptische Eigenschaften der ferromagnetischen Körper indessen, insbesondere diejenigen, welche der Magnetisierung parallel gehen, erfordern die Heranziehung der Magnetisierungselektronen. Was das Verständnis des Ferromagnetismus überhaupt anbelangt, so hat die Elektronenhypothese bisher leider keine Erfolge zu verzeichnen. Wir sind noch weit davon entfernt, die Anomalien der ferromagnetischen Körper vom Standpunkte der Elektronentheorie aus deuten zu können.

§ 32. Elektrische Leitung.

Nach der Elektronentheorie beruht die Eigenschaft gewisser Körper, den elektrischen Strom zu leiten, auf der Anwesenheit von „Leitungselektronen“, d. h. von elektrischen

Teilchen, welche unter der Einwirkung elektrischer Felder über größere Strecken hin wandern. Diese Elektronen können mit der Masse materieller Atome beladen sein wie bei Elektrolyten, oder sie können frei, d. h. nur mit der ihnen eigenen, elektromagnetischen Masse behaftet sein. Gerade in den besten Leitern, den Metallen, wird man freie Elektronen als Stromträger anzunehmen haben. Wie wir bereits mehrfach erwähnt haben, sind von E. Riecke[49]) und insbesondere von P. Drude[9]) Vorstellungen über die Bewegung der Elektronen im Metalle entwickelt worden, welche der kinetischen Theorie der Gase nachgebildet sind. Fehlen äußere elektrische Kräfte, so sollen die Elektronen sich regellos bewegen, ähnlich wie die Moleküle eines Gases; die mittlere lebendige Kraft eines Elektrons soll gleich derjenigen sein, welche einem Gasmoleküle bei der gleichen Temperatur zukommt. Wir bezeichnen mit α die mittlere lebendige Kraft eines Moleküls oder Elektrons bei der absoluten Temperatur $\vartheta = 1$ (Boltzmann-Drudesche Konstante) und setzen

$$\frac{1}{2} \overline{m \mathfrak{v}^2} = \alpha \vartheta .$$

Die Elektronen sollen Zickzackbahnen beschreiben; der Stoß, durch den die Bewegungsrichtung geändert wird, kann entweder zwischen den Elektronen selbst erfolgen oder an den neutralen Molekülen, welche gewissermaßen das feste Gerüst des Metalles bilden.

Welches wird nun der Einfluß eines elektrischen Feldes sein? Es wird die unregelmäßige Wärmebewegung der Elektronen ein wenig abgeändert werden, so daß im Mittel diejenige Bewegungsrichtung überwiegt, nach der die Elektronen durch das Feld getrieben werden. Es sei $\mathfrak{v}_1$ die mittlere Geschwindigkeit der betreffenden Elektronengruppe, l_1 die mittlere freie Weglänge; beim Durchlaufen der freien Weglänge l_1 wird das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ einem Elektron von der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ die zusätzliche Geschwindigkeit erteilen

$$\mathfrak{E} \cdot \frac{e_1}{m_1} \cdot t, \quad 0 < t < \frac{l_1}{|\mathfrak{v}_1|} .$$

Der Mittelwert dieser Geschwindigkeit ist

$$\mathfrak{E} \cdot \frac{e_1}{m_1} \cdot \frac{l_1}{2|\mathfrak{v}_1|} = \mathfrak{E} \cdot \frac{e_1 l_1 |\mathfrak{v}_1|}{2 m_1 \mathfrak{v}_1^2}.$$

Die Multiplikation mit der Ladung e_1 und der auf die Volumeinheit bezogenen Zahl N_1 ergibt als Anteil der Elektronen der betreffenden Gruppe zur Stromdichte:

$$\mathfrak{E} \cdot e_1^2 N_1 \frac{l_1 |\mathfrak{v}_1|}{2 m_1 \mathfrak{v}_1^2} = \mathfrak{E} \cdot \frac{1}{4 \alpha \vartheta} \cdot e_1^2 N_1 l_1 |\mathfrak{v}_1|,$$

wenn man von den strengen, das Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilungsgesetz berücksichtigenden Methoden der Mittelwertsbildung absieht. Durch Summierung der Anteile der verschiedenen Gruppen folgt die Stromdichte

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{E} \cdot \frac{1}{4 \alpha \vartheta} \left\{ e_1^2 N_1 l_1 |\mathfrak{v}_1| + e_2^2 N_2 l_2 |\mathfrak{v}_2| + \cdots \right\}.$$

Dieselbe ist der Feldstärke proportional, d. h. es gilt das Ohmsche Gesetz so lange, als die zusätzliche, durch das elektrische Feld erteilte Geschwindigkeit der Elektronen klein gegen die mittlere Geschwindigkeit der Wärmebewegung ist; unter dieser der obigen Ableitung zugrunde liegenden Voraussetzung erhält Drude für die Leitfähigkeit den konstanten Wert

$$\sigma = \frac{1}{4 \alpha \vartheta} \left\{ e_1^2 N_1 l_1 |\mathfrak{v}_1| + e_2^2 N_2 l_2 |\mathfrak{v}_2| + \cdots \right\}.$$

Die einfachste Annahme wäre die, daß in den Metallen nur eine Sorte freier, und zwar negativer Elektronen den Strom transportiert. Doch fragt es sich, ob auf Grund dieser Annahme die thermoelektrischen und sonstigen Eigenschaften der Metalle sich befriedigend erklären lassen.

In Gasen sind die Vorgänge, welche die elektrische Leitung begleiten, weit verwickelter als in Metallen. Die freie Weglänge der Elektronen ist hier größer, so daß die durch das elektrische Feld erteilte Geschwindigkeit keineswegs immer klein gegen diejenige der regellosen Wärmebewegung ist. So erklären sich die Abweichungen vom Ohmschen Gesetze, welche bei Gasen oft in recht augenfälliger Weise hervortreten. Auch lagern sich den freien Elektronen neutrale Moleküle in wech-

selnder Anzahl an, wie in § 1 erwähnt wurde. Dort haben wir die für die allgemeine Theorie der Elektrizität bedeutungsvollen Ergebnisse der neueren Untersuchungen über Gasionen bereits kennen gelernt.

§ 33. Das elektromagnetische Feld hochfrequenter Ströme in linearen Leitern.

Wir hatten bereits in dem einleitenden Kapitel dieses Bandes (§ 8) allgemeine Sätze über die Fortpflanzung elektromagnetischer Störungen kennen gelernt. Wir waren dabei ausgegangen von den Feldgleichungen (I bis IV) der Elektronentheorie und hatten diese mit Hilfe der elektromagnetischen Potentiale, und noch übersichtlicher mit Hilfe des Hertzschen Vektors $\mathfrak{Z}$, gelöst. War die Dichte des Konvektionsstromes der Elektronen gegeben, so ließ sich auf Grund von (47, 48c, d, 51d) das elektromagnetische Feld der bewegten Elektronen ermitteln.

In der Bezeichnungsweise, deren wir uns jetzt bedienen, werden die elektromagnetischen Vektoren der von den einzelnen Elektronen erregten Felder durch $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{h}$ vorgestellt. Aus den Feldgleichungen (I bis IV) der Elektronentheorie haben wir in § 28 durch Mittelwertsbildung die Differentialgleichungen (Ia bis IVa) abgeleitet; dieselben verknüpfen die Mittelwerte $\bar{\mathfrak{e}}$, $\bar{\mathfrak{h}}$ mit den Mittelwerten der Dichten der Elektrizität und des Konvektionsstromes genau so, wie durch die ursprünglichen Gleichungen (I bis IV) die Vektoren $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{h}$ mit den Dichten selbst verknüpft waren. Wir können also dasjenige, was wir aus diesen Feldgleichungen ableiteten, ohne weiteres auf die durch Mittelwertsbildung entstandenen Gleichungen (Ia bis IVa) übertragen. Erinnern wir uns ferner, daß wir, um zur Übereinstimmung mit den Hauptgleichungen der Maxwellschen Theorie (Ib bis IVb) zu gelangen, durch (166) und (166a) $\bar{\mathfrak{e}}$ mit $\mathfrak{E}$, $\bar{\mathfrak{h}}$ mit $\mathfrak{B}$ identifiziert haben, so erhalten wir

$$\mathfrak{B} = \operatorname{curl} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l}, \quad l = ct. \tag{175}$$

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0 = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{Z} - \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial l^2}. \tag{176}$$

Dabei ist $\mathfrak{E}_0$ die Feldstärke des anfänglichen elektrostatischen Feldes. Es bestimmen sich die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ und die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ zu einer beliebigen Zeit, wenn der Hertzsche Vektor bekannt ist. Dieser aber berechnet sich aus den (47) und (51d) entsprechenden Beziehungen

$$\bar{\mathfrak{q}} = \int_0^l \bar{\mathfrak{k}}\,dl = \int_0^t \overline{\varrho\mathfrak{v}}\,dt, \tag{177}$$

$$\mathfrak{Z} = \int \frac{dv}{r} \left\{ \bar{\mathfrak{q}} \right\}_{t-\frac{r}{c}} \tag{178}$$

Als Mittelwert der elektrischen Stromdichte in ruhenden Körpern ist dabei der in (165a) angegebene Ausdruck einzutragen:

$$\overline{\varrho\mathfrak{v}} = \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + c\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{M}, \tag{179}$$

der zusammengesetzt ist aus den von den Leitungselektronen, den Polarisationselektronen und den Magnetisierungselektronen herrührenden Stromanteilen. Von jedem Volumelemente des Raumes, in welchem das Zeitintegral (177) dieses Vektors von Null verschieden ist, wird ein Beitrag zum Hertzschen Vektor beigesteuert; derselbe eilt mit Lichtgeschwindigkeit nach dem Aufpunkte hin, wobei sein Betrag sich in einem, dem zurückgelegten Latenswege umgekehrt proportionalen Maße verringert.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß die Beziehungen (175) bis (179) sich unmittelbar auf dem in § 8 eingeschlagenen Wege auch aus den Hauptgleichungen (Ib bis IVb) der Maxwellschen Theorie hätten herleiten lassen, von deren Identität mit den Gleichungen (Ia bis IVa) wir uns ja in § 28 überzeugt haben. In der Tat sind die physikalischen Voraussetzungen, auf denen die Entwickelungen dieses Paragraphen und des nächstfolgenden beruhen, von den besonderen Vorstellungen der Elektronentheorie unabhängig.

Wir waren bei der Darlegung der Theorie der elektrischen Schwingungen im ersten Bande dieses Werkes auf die Strahlung eines Stromsystems nicht eingegangen; wir hatten versprochen,

im zweiten Bande diese Lücke auszufüllen. Die allgemeinen Sätze über die Ausbreitung elektromagnetischer Störungen, die uns in der Mechanik der Elektronen von so großem Nutzen waren, gestatten es uns, jenes Versprechen zu erfüllen und nunmehr jene für die drahtlose Telegraphie fundamentalen Fragen zu erledigen.

Wir denken uns ein System elektrischer Schwingungskreise; dasselbe sei von beliebigen, polarisierbaren und magnetisierbaren Körpern umgeben. Es werde, etwa durch den elektrischen Funken, plötzlich ein Schwingungsvorgang ausgelöst. Welches elektromagnetische Feld wird erregt?

Die Gleichungen (175) bis (179) bestimmen die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ des gesuchten Feldes. Freilich bedürfen wir zur Berechnung von $\bar{\mathfrak{q}}$ der Kenntnis nicht nur des Leitungsstromes, sondern auch der Magnetisierung und des an der Materie haftenden Anteiles des Verschiebungsstromes. Meist werden wir die Stromverteilung in den Leiterkreisen sowie die elektrische Polarisation und die Magnetisierung der umgebenden Isolatoren nicht von vornherein kennen; wir werden vielmehr meist diese selbst als Unbekannte anzusehen haben, die sich erst nachträglich aus der Kenntnis des Feldes ergeben. Unter diesen Umständen reichen jene Gleichungen zur Lösung der gestellten Aufgabe nicht aus.

Wir können indessen die Gleichungen (175) bis (179) verwerten, wenn wir die Problemstellung passend spezialisieren. Wir wollen annehmen, daß die Schwingungskreise sich im leeren Raume befinden oder, was praktisch auf dasselbe herauskommt, im Luftraume; alsdann fallen die von der Polarisation und der Magnetisierung der Körper herrührenden Stromanteile fort, es bleibt nur der Leitungsstrom übrig. Dieser soll nun in linearen Leitern fließen, d. h. in Drähten, deren Querschnittsabmessungen klein sind, sowohl gegen die Länge der Drähte als auch gegen die Wellenlänge der in den Raum entsandten elektromagnetischen Wellen. Handelt es sich dann um die Bestimmung des elektromagnetischen Feldes in Aufpunkten, deren Entfernung von den Leitern groß gegen deren

Querschnittsabmessungen ist, so kommt es auf die Verteilung des Stromes J über den Querschnitt des Leiters nicht an. Es kann, wenn dv das Volumen eines zylindrischen Leiterstückes und $d\mathfrak{s}$ ein Element seiner Leitlinie bezeichnet, gemäß (177) gesetzt werden

$$\bar{\mathfrak{q}}\,dv = \int_0^t \mathfrak{i}\,dv\,dt = d\mathfrak{s}\int_0^t J\,dt$$

oder

$$\bar{\mathfrak{q}}\,dv = q\,d\mathfrak{s};$$

dabei ist

$$q = \int_0^t J\,dt \tag{180}$$

die seit Beginn des Schwingungsvorganges durch den betreffenden Querschnitt hindurchgeströmte Elektrizitätsmenge. Es folgt dann aus (178)

$$\mathfrak{Z} = \int \frac{d\mathfrak{s}}{r}\{q\}_{t-\frac{r}{c}} = \int d\mathfrak{s}\,\frac{q(l-r)}{r} \tag{180a}$$

als Wert des Hertzschen Vektors in einem Aufpunkte, dessen Entfernung r von den stromdurchflossenen Drähten groß gegen die Querschnittsabmessungen ist; dieser Wert stellt sich dar als ein längs der Leitlinien aller stromdurchflossenen linearen Leiter erstrecktes Integral, und zwar hängt der von den Stromelementen beigesteuerte Beitrag von dem Werte von q ab, welcher in einem um die Latenszeit $\frac{r}{c}$ zurückliegenden Augenblick die bis dahin durchgeströmte Elektrizitätsmenge angab.

Wir erhalten übrigens aus (48a) und (180, 180a) für das elektromagnetische Vektorpotential den Ausdruck

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l} = \frac{1}{c}\int \frac{d\mathfrak{s}}{r}\{J\}_{t-\frac{r}{c}}. \tag{180b}$$

Diese Formel können wir der Formel (168a) in Bd. I, S. 227 an die Seite stellen, welche das Vektorpotential eines stationären Stromes in einem linearen Leiter bestimmt. Wir haben hier μ gleich 1 gesetzt, weil wir von dem Felde im

leeren Raume reden, wo curl $\mathfrak{A}$ sowohl gleich $\mathfrak{B}$ wie $\mathfrak{H}$ ist. Der wesentliche Unterschied der beiden Formeln jedoch liegt darin, daß dort die jeweilige Stromstärke in Rechnung gezogen wurde, während hier die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der von den Stromelementen ausgehenden Wirkungen berücksichtigt ist. Auch durfte dort, weil ein stationärer Strom stets ein geschlossener Strom ist, welcher durch alle Querschnitte dieselbe Elektrizitätsmenge führt, J vor das Integralzeichen gesetzt werden. Das ist hier nicht ohne weiteres erlaubt; ein nicht stationärer Strom kann durch verschiedene Querschnitte eines Leiters verschiedene Elektrizitätsmengen transportieren, wobei eine Anhäufung von Elektrizität an der Oberfläche des Drahtes stattfindet. Der nicht stationäre Strom braucht auch keineswegs ein geschlossener zu sein. Wir können uns etwa die Enden des Leitungsdrahtes in die einander gegenüberliegenden Platten eines Kondensators mündend vorstellen oder auch frei endigend. In jedem Falle kann das magnetische Feld aus (180b) ermittelt werden. Wir erhalten aus dieser Formel ein Urteil über den Gültigkeitsbereich der Theorie des quasistationären Stromes (Bd. I, Abschn. III, Kap. 2), welche auf der Formel (Bd. I, 168a) beruht, und werden befähigt, die Theorie auf hochfrequente Ströme in linearen Leitern anzuwenden, die weder als quasistationär noch als geschlossen gelten können. Bei schnellen Schwingungen ist das magnetische Feld unzertrennlich mit dem elektrischen verknüpft, wie ja auch an Stelle des skalaren elektrostatischen Potentiales bzw. des magnetischen Vektorpotentiales die beiden elektromagnetischen Potentiale treten, die sich aus dem Hertzschen Vektor ableiten (vgl. 48a, b).

Auf Grund von (180a) bestimmen wir durch die Gleichungen

$$\mathfrak{H} = \operatorname{curl} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l}, \tag{181}$$

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0 = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{Z} - \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial l^2} \tag{181a}$$

das Feld der elektromagnetischen Störung im Luftraume, welche von schnellen elektrischen Schwin-

gungen in linearen Leitern erregt wird. Insbesondere beherrschen wir so die Theorie der entsandten Wellen, die in der drahtlosen Telegraphie zur Übertragung der Signale verwandt werden.

Wir wenden die allgemeinen Ansätze auf einen Schwingungskreis an, dessen Abmessungen klein gegen die Wellenlänge der entsandten Wellen sind. Dieser Bedingung genügt die in Bd. I, § 72 behandelte Anordnung: Ein Kondensator, dessen Platten durch einen Leitungsdraht verbunden sind. Hier kann der Strom als quasistationär betrachtet werden, falls die Kapazität der Leitung gegen diejenige des Kondensators verschwindet, und es hat die Stromstärke J und deren Zeitintegral q für alle Querschnitte der Leitung den gleichen Betrag. Verstehen wir unter e die jeweilige Ladung derjenigen Kondensatorplatte, in welcher die Leitung endigt, so gilt nach (180)

$$q = \int_0^t J dt = e - e_0. \tag{182}$$

Dabei ist e_0 die anfängliche Ladung jener Kondensatorplatte; die jeweilige und die anfängliche Ladung der ihr gegenüberstehenden Platte, in welcher die Leitung beginnt, sind $-e$, bzw. $-e_0$.

Wir denken uns einen Aufpunkt, dessen Entfernung von dem Schwingungskreise groß gegen die Abmessungen des Kreises ist. Die Entfernung braucht darum noch nicht groß gegen die Wellenlänge zu sein. Die Entfernung r dieses Aufpunktes von den einzelnen Punkten der Drahtleitung ist merklich die gleiche; es kann daher in (180a) diese Entfernung vor das Integralzeichen gesetzt werden. Dasselbe gilt von $q(l-r)$; denn es sollen die Abmessungen des Kreises, und demnach die Differenzen der Latenswege, klein gegen die Wellenlänge sein, die Schwingungsphasen sind mithin für alle Punkte der Leitung zur Zeit des Entsendens merklich die gleichen. Wir erhalten

$$\mathfrak{Z} = \frac{q(l-r)}{r} \cdot \int d\mathfrak{s}. \tag{182a}$$

Die hier eingehende Vektorsumme aller Elemente des linearen Leiters kann, gemäß den allgemeinen Regeln der Vektoraddition, durch einen einzigen Vektor ersetzt werden, welcher direkt von dem Anfangspunkt der Leitung zu ihrem Endpunkte führt.

Verstehen wir unter $\mathfrak{p}$ das Moment des Dipols, welcher durch zwei in diesen Punkten befindliche Ladungen $\pm e$ gebildet wird, so können wir schreiben

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{p}(l-r)}{r} - \frac{\mathfrak{p}_0}{r}. \tag{182b}$$

Das ursprüngliche elektrostatische Feld der Ladungen $\pm e_0$ wird gemäß Bd. I, Gl. (81), S. 66 gegeben durch:

$$\mathfrak{E}_0 = -\nabla\varphi, \quad \varphi = -\left(\mathfrak{p}_0 \nabla_a \frac{1}{r}\right) = -\operatorname{div}\left(\frac{\mathfrak{p}_0}{r}\right).$$

Es folgt demnach aus (181, 181a) für das elektromagnetische Feld des Schwingungskreises

$$\mathfrak{H} = \operatorname{curl} \frac{\partial}{\partial l}\left\{\frac{\mathfrak{p}(l-r)}{r}\right\}, \tag{182c}$$

$$\mathfrak{E} = \nabla \operatorname{div}\left\{\frac{\mathfrak{p}(l-r)}{r}\right\} - \frac{\partial^2}{\partial l^2}\left\{\frac{\mathfrak{p}(l-r)}{r}\right\}. \tag{182d}$$

Lassen wir endlich die z-Achse mit der Achse des Dipols zusammenfallen, so erkennen wir, daß die erhaltenen Formeln durchaus identisch sind mit den Formeln (53, 53a, b) des § 9. Dort wird der periodische Wechsel des elektrischen Momentes des Dipols durch die Schwingungen eines Elektrons veranlaßt, hier durch den quasistationären Leitungsstrom in dem Drahte, welcher die Kondensatorplatten verbindet. In Entfernungen, die groß sind gegen die Abmessungen des Systemes, kommt es, wie wir sehen, nicht auf die Konfiguration des Systemes im einzelnen, sondern nur auf das resultierende Moment an. Wir können die Formeln (53c, d), durch welche wir dort das Feld darstellten, ohne weiteres auf den vorliegenden Fall übertragen. Zusammenfassend können wir sagen: Das elektromagnetische Feld des quasistationären Stromes in einem linearen Leiter, welcher die Platten eines Luft-

kondensators verbindet, läßt sich in Entfernungen, die groß gegen die Abmessungen des Leiters sind, ersetzen durch das Feld eines Dipols, dessen Achse der vom Anfangspunkt der Leitung direkt zum Endpunkt gezogene Fahrstrahl und dessen Ladungen die Ladungen $\pm e$ der Kondensatorplatten sind.

Wir dürfen unsere Formeln nur auf einen Luftkondensator anwenden, weil wir bei der Berechnung des Hertzschen Vektors in (179) nur den Leitungsstrom berücksichtigt hatten, aber nicht die von der Polarisation und der Magnetisierung der umgebenden Körper herrührenden Stromanteile. Wie ändern sich die Ergebnisse unserer Betrachtungen, wenn man an Stelle des Luftkondensators einen Kondensator setzt, der mit einem dielektrischen Körper gefüllt ist? Dann ist der an der Materie haftende Bruchteil $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$ des Verschiebungsstromes dem Leitungsstrome hinzuzufügen. Die elektrische Verschiebung ist nun von der mit der Ladung $+e$ versehenen Platte durch das Dielektrikum nach der mit der Ladung $-e$ versehenen gerichtet. Der Verschiebungsstrom ergänzt den Leitungsstrom im Drahte zu einer geschlossenen Strömung, er ist dem Stromelemente, das von der Ladung $-e$ nach $+e$ geht, und welches den Leitungsstrom hinsichtlich der Fernwirkung ersetzt, entgegen gerichtet. Würde der gesamte Verschiebungsstrom in Rechnung zu setzen sein, so würde seine Fernwirkung diejenige des Leitungsstromes gerade aufheben. Da aber nur der Bruchteil $1 - \frac{1}{\varepsilon}$ in Rechnung zu ziehen ist, so wird die Fernwirkung nicht aufgehoben, sondern nur im Verhältnis $1:\varepsilon$ verringert. Wir können das Ergebnis auch so ausdrücken: Ist der Raum zwischen den Kondensatorplatten mit einer dielektrischen Substanz erfüllt, so ist für die Fernwirkung das Moment der freien Ladungen der Kondensatorbelegungen maßgebend.

Für die drahtlose Telegraphie ist die Kenntnis der Feldstärken in der Wellenzone von Wichtigkeit; diese bildet sich in Entfernungen vom Schwingungskreis, die groß gegen die

Wellenlänge sind. Die Feldstärken des Dipols werden hier durch (54) gegeben; sie sind am größten in Richtungen senkrecht zur Achse des Dipols. Hier wird

$$|\mathfrak{E}| = |\mathfrak{H}| = \frac{1}{r} \cdot \left\{\frac{d^2\mathfrak{p}}{dl^2}\right\}_{l-r}.$$

Die elektrische Feldstärke ist dabei parallel, die magnetische senkrecht zur Achse des Dipols gerichtet. Ist d der Abstand der Kondensatorplatten, d. h. der Abstand der einander gegenüberliegenden Enden der Leitung, so wird speziell für einfach harmonische Schwingungen von der Schwingungszahl ν (in 2π Sekunden)

$$|\mathfrak{E}| = |\mathfrak{H}| = \frac{ed}{\varepsilon r} \cdot \frac{\nu^2}{c^2}. \tag{182e}$$

Die Wellenamplitude ist proportional der Ladungsamplitude und dem Abstand der Kondensatorplatten sowie dem Quadrate der Schwingungszahl, umgekehrt proportional der Dielektrizitätskonstanten und der Entfernung.

Man könnte nun daran denken, die Reichweite der funkentelegraphischen Signale dadurch zu vergrößern, daß man die Kapazität des Kondensators steigerte; denn die Ladungsamplitude e ist ja gleich dem Produkte aus der Spannungsamplitude, welche durch die Schlagweite der Funkenstrecke bestimmt ist, und aus der Kapazität. Nun ist aber, wie aus der Formel (Bd. I, Gl. 192c, S. 291) hervorgeht, bei gegebener Selbstinduktion der Leitung ν^2 umgekehrt proportional der Kapazität K des Kondensators. Vergrößert man die Kapazität, indem man d und ε konstant hält, d. h. indem man die Fläche der Kondensatorplatten vergrößert, so bleibt trotz der Vergrößerung der Ladungsamplitude die Wellenamplitude die gleiche. Erreicht man jedoch die Steigerung der Kapazität durch Verringerung des Plattenabstandes d oder durch Wahl eines Isolators von größerer Dielektrizitätskonstante ε, so verkleinert man sogar die Amplitude der entsandten Wellen. Der Vergrößerung der im Schwingungskreise aufgespeicherten Energie entspricht mithin keineswegs eine Steigerung der ausgestrahlten Energie.

Überhaupt ist die Verwendung nahezu geschlossener Kreise und quasistationärer Ströme für die Zwecke der drahtlosen Telegraphie nicht günstig. Bei einer solchen Anordnung zerstören sich, wie wir gesehen haben, die Beiträge der einzelnen Stromelemente fast vollständig, während im Gegenteil eine Verstärkung der von den einzelnen Stromelementen herrührenden Wellen anzustreben ist. Das Zusammenwirken der Wellen aller Stromelemente wird erreicht bei den geradlinigen Sendeantennen, die man in der drahtlosen Telegraphie verwendet. Mit ihrer Theorie wird sich der nächste Paragraph beschäftigen.

Wir wollen, um Mißverständnisse auszuschließen, nochmals betonen, daß die in den Gleichungen (182, 182a) vorgenommene Spezialisierung nur dann erlaubt ist, wenn die Abmessungen des nahezu geschlossenen Kreises klein gegen die Wellenlänge sind: nur in diesem Falle setzen sich die von den einzelnen Stromelementen erregten Wellen zu einer einzigen Welle zusammen, welche von der Lücke der Leitung auszugehen scheint. Hat man es hingegen mit einem nahezu geschlossenen Kreise zu tun, dessen Abmessungen nicht klein gegen die Wellenlänge sind (z. B. einem Hertzschen Resonator ohne eingeschaltete Kapazität), so hat man den Hertzschen Vektor aus den allgemeineren Gleichungen (180, 180a) zu berechnen. Die Stromstärke J und ihr Zeitintegral q haben hier keineswegs für alle Querschnitte den gleichen Wert, da die Kapazität der Leitung nicht zu vernachlässigen ist. Auch haben die Beiträge, die, von verschiedenen Stromelementen des Kreises entsandt, gleichzeitig in einem entfernten Aufpunkte eintreffen, in diesem Falle Latenswege zurückgelegt, deren Differenzen von der Ordnung der Wellenlänge sind; es sind demnach für die einzelnen Stromelemente verschiedene Schwingungsphasen in Betracht zu ziehen. Aus diesen Gründen ist es nicht gestattet, die Fernwirkung eines geschlossenen Schwingungskreises allgemein gleich Null zu setzen und die Fernwirkung einer ungeschlossenen Leitung stets von den Enden ausgehen zu lassen. Im allgemeinen geht die Strahlung keineswegs von den Enden der Leitung, sondern von allen Stromelementen

der Leitung aus. Auch ein geschlossener Kreis entsendet daher im allgemeinen, wenn er von schnell wechselndem Strom durchflossen ist, elektromagnetische Wellen. Nur dann, wenn seine Abmessungen klein gegen die Wellenlänge sind, wird die Vektorsumme aller Stromelemente gleich Null; aus diesem Grunde, und weil dieselbe Schwingungsphase für alle Stromelemente in Betracht kommt, verschwindet das Feld in entfernten Aufpunkten, und somit die Strahlung des geschlossenen Kreises.

§ 34. Die Strahlung von Sendedrähten.

Wir denken uns einen geradlinigen Draht, von der Länge $2h$, frei im Raume befindlich. Es mögen, etwa durch den elektrischen Funken, die elektrischen Eigenschwingungen dieses Drahtes erregt sein. Wir nehmen an, daß für die Fortpflanzung von Drahtwellen längs eines Einzeldrahtes, wenigstens angenähert, dieselben Gesetze gelten, die wir für zwei Paralleldrähte bewiesen haben (Bd. I, §§ 79, 81, 82), d. h. daß die Geschwindigkeit der Fortpflanzung längs der Leitung der Geschwindigkeit c gleich ist, mit welcher die Wellen sich im Raume ausbreiten, und daß am freien Ende eine einfache Reflexion der Stromwelle stattfindet. Treffen diese Voraussetzungen zu, so werden sich stehende Wellen längs des Drahtes ausbilden, die an den freien Enden Stromknoten besitzen, während die etwa sonst noch vorhandenen Stromknoten in Abständen von je einer halben Wellenlänge aufeinander folgen. Dem entspricht der Ansatz

$$J = a \cdot \sin(\nu t) \cdot \cos\left(\frac{\nu \zeta}{c}\right), \tag{183}$$

falls n eine ungerade ganze Zahl und

$$\frac{\nu h}{c} = n \frac{\pi}{2} \tag{183a}$$

ist. Die hierdurch dargestellten ungeradzahligen Eigenschwingungen besitzen in der Mitte des Drahtes, bei $\zeta = 0$, ein Maximum des Stromes; die Konstante a gibt die Stromamplitude daselbst an. Stromknoten liegen bei

(183b) $$\zeta = \pm \frac{m}{n} \cdot h, \quad \text{wo} \quad m \leqq n$$

eine ungerade ganze Zahl ist. Die durch $n = 1$ gegebene Grundschwingung hat nur zwei Stromknoten, und zwar an den Drahtenden; ihre Wellenlänge ist

(183c) $$\lambda_1 = \frac{2\pi c}{\nu_1} = 4h,$$

d. h. sie ist gleich der doppelten Drahtlänge, während für die Oberschwingungen die Drahtlänge $2h$ ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge ist, wie die Gleichung

(183d) $$\lambda_n = \frac{2\pi c}{\nu_n} = \frac{4h}{n}$$

besagt. Die durch (183b) bestimmten $n + 1$ Stromknoten teilen den Draht in n Strecken, deren jede einer halben Wellenlänge gleich ist. Von den geradzahligen Eigenschwingungen, welche in der Mitte einen Stromknoten besitzen, sehen wir hier ab.

Inwiefern die theoretischen Voraussetzungen des Ansatzes (183) zutreffen, mag zunächst unerörtert bleiben. Wir denken uns diese Stromverteilung experimentell festgestellt. Die Grundformel (180a) bestimmt dann den Hertzschen Vektor und somit die Fernwirkung des Drahtes. Aus der durch (180) bestimmten Größe

$$q = \frac{a}{\nu} \cos\left(\frac{\nu \zeta}{c}\right)\left(1 - \cos(\nu t)\right)$$

folgt nach (180a) als z-Komponente des Hertzschen Vektors

(184) $$\mathfrak{Z}_z = \frac{a}{\nu} \int_{-h}^{+h} \frac{d\zeta}{r} \cos\left(\frac{\nu \zeta}{c}\right) \cdot \left(1 - \cos\frac{\nu}{c}(l - r)\right).$$

Die beiden anderen Komponenten von $\mathfrak{Z}$ verschwinden. Auf Grund von (181, 181a) bestimmt sich hieraus das elektromagnetische Feld in Entfernungen, die groß gegen die Abmessungen des Drahtquerschnittes sind. Der von $l = ct$ unabhängige Teil des Ausdruckes (184) rührt von der anfäng-

lichen Ladungsverteilung her und ergibt deren elektrostatisches Feld $\mathfrak{E}_0$. Uns interessiert nur das periodisch wechselnde Feld der Schwingung; wir setzen daher für die Hertzsche Funktion

$$\mathfrak{Z}_z = -\frac{a}{\nu}\int_{-h}^{+h}\frac{d\zeta}{r}\cos\left(\frac{\nu\zeta}{c}\right)\cos\left(\frac{\nu l - \nu r}{c}\right) \tag{184a}$$

und erhalten aus (181, 181a) die Komponenten der Feldstärken:

$$\mathfrak{H}_x = \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial y \partial l}, \quad \mathfrak{H}_y = -\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial x \partial l}, \tag{184b}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{E}_x = \dfrac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial x \partial z}, & \mathfrak{E}_y = \dfrac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial y \partial z}, \\ \mathfrak{E}_z = \dfrac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial z^2} - \dfrac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial l^2}. \end{cases} \tag{184c}$$

Wir wollen diese Ausdrücke zur Ermittelung der vom Drahte ausgesandten elektromagnetischen Wellen verwerten. Wir wählen einen Aufpunkt, dessen Entfernung r_0 vom Mittelpunkte des Drahtes groß sowohl gegen die Wellenlänge als auch gegen die Drahtlänge ist. Im Nenner des Integranden in (184a) kann dann r durch r_0 ersetzt werden, hingegen im Argumente des im Zähler auftretenden Kosinus ist zu setzen

$$r = r_0 - \zeta \cos\vartheta_0,$$

oder

$$r = r_0 - \zeta u, \quad u = \cos\vartheta_0, \tag{185}$$

wobei ϑ_0 den Winkel anzeigt, welchen der vom Drahtmittelpunkte nach dem Aufpunkte hin gezogene Fahrstrahl $\mathfrak{r}_0$ mit der Drahtachse einschließt. Die Unterschiede der Latenswege der von verschiedenen Punkten des Sendedrahtes entsandten und gleichzeitig im Aufpunkte eintreffenden Wellen kommen hier wesentlich in Betracht.

Wir erhalten

$$\mathfrak{Z}_z = -\frac{a}{r_0 \nu}\int_{-h}^{+h} d\zeta \cos\left(\frac{\nu\zeta}{c}\right)\cos\left\{\frac{\nu}{c}(l - r_0) + \frac{\nu u \zeta}{c}\right\}. \tag{185a}$$

Nun ist offenbar

$$\int_{-h}^{+h} d\zeta \cos\left(\frac{\nu\zeta}{c}\right) \sin\left(\frac{\nu u \zeta}{c}\right) = 0,$$

infolge von (183a) ergibt ferner eine einfache Rechnung

$$\int_{-h}^{+h} d\zeta \cos\left(\frac{\nu\zeta}{c}\right) \cos\left(\frac{\nu u \zeta}{c}\right) = \frac{2c}{\nu} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2} u\right)}{1-u^2}.$$

Demnach erhalten wir als **Wert der Hertzschen Funktion des Sendedrahtes in der Wellenzone:**

$$\text{(185b)} \qquad \mathfrak{Z}_z = -a \frac{2c}{\nu^2} \frac{\cos\left(\frac{\nu l}{c} - \frac{\nu r_0}{c}\right)}{r_0} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2} u\right)}{1-u^2}.$$

Dieser Ausdruck entspricht der Hertzschen Funktion eines der z-Achse parallelen Dipols (vgl. 53), doch ist für die verschiedenen, durch u bestimmten Richtungen ein verschiedenes Moment des Dipols in Rechnung zu setzen. Dies ist das Ergebnis der Superposition der von den Stromelementen des Drahtes herrührenden Wirkungen, welche in verschiedenen Phasen im Aufpunkte eintreffen.

Bei der Berechnung der Feldstärken aus (184b, c) braucht nur das Argument des von l und r_0 abhängigen Kosinus differentiiert zu werden, da in großen Entfernungen die übrigen durch Differentiation nach den Koordinaten entstehenden Terme fortfallen. Man erhält eine Orientierung der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in der Wellenzone, welche ganz derjenigen des Dipols entspricht. Konstruiert man auf der Kugelfläche, welche die Lage der Welle angibt, das System der Längen- und Breitenkreise, indem man die Schnittpunkte der verlängerten Drahtachse mit der Kugel als Pole wählt, so findet man den elektrischen Vektor überall den Meridianen, den magnetischen den Breitenkreisen parallel weisend. Die Beträge der beiden Vektoren sind

$$\text{(185c)} \qquad |\mathfrak{E}| = |\mathfrak{H}| = \frac{2a}{c} \cdot \frac{\cos\left(\nu t - \frac{\nu r_0}{c}\right)}{r_0} \cdot \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2} u\right)}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Über die Verteilung der Feldstärken längs der Meridiane ist folgendes auszusagen: Ihren maximalen Betrag haben die Feldstärken am Äquator der Kugel (wo, gemäß (185), $u = 0$, $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ ist). Für die Grundschwingung ($n = 1$) nehmen sie allmählich nach den Polen hin ab, um dort zu verschwinden. Die Oberschwingungen hingegen haben die durch

$$(185\text{d}) \qquad u = \pm \frac{m}{n} \; (m \leqq n \text{ eine ungerade ganze Zahl})$$

gegebenen Breitenkreise als Knotenlinien. Hier zerstören sich durch Interferenz die von den einzelnen Stromelementen des Sendedrahtes ausgehenden Wellen.

Es fällt auf, daß die Amplitude (185c) der von den Eigenschwingungen des Sendedrahtes erregten Wellen die Länge des Drahtes nicht enthält. Man könnte zunächst versucht sein, dieses Ergebnis für irrig zu halten, da ja die Amplitude der entsandten Wellen der Länge des stromführenden Drahtes proportional sein muß; dabei würde man aber übersehen, daß mit der Länge des Drahtes auch die Wellenlänge gesteigert wird. Da die Amplitude der entsandten Wellen nicht der Stromstärke selbst, sondern deren zeitlicher Änderung proportional ist, so kompensiert die Abnahme der Fernwirkung infolge der Verringerung der Frequenz die Zunahme infolge der Vergrößerung der wirklichen Drahtlänge. Von der Antennenlänge ist die Fernwirkung unabhängig. Es ist, wenn man möglichst intensive Wellen zu erregen wünscht, die maximale Stromamplitude a im Sendedrahte möglichst zu steigern. Für eine gegebene Antenne geht nun zwar die Stromamplitude der Spannungsamplitude parallel. Doch kann man, wenn die Spannungsamplitude vorgeschrieben ist, die Stromamplitude steigern, indem man Antennen von möglichst großer Kapazität pro Längeneinheit (d. h. möglichst dicke Drähte) wählt; auf demselben Prinzip beruht die Steigerung der Fernwirkung, die man in der drahtlosen Telegraphie durch Käfigantennen erzielt. Durch Vergrößerung der Antennenlänge aber werden die Wellenamplituden nicht vergrößert.

Wir schreiten zur Berechnung der pro Sekunde entsandten Gesamtstrahlung. Aus dem Poyntingschen Satze folgt

$$\mathfrak{S}_{r_0} = \frac{c}{4\pi} \cdot |\mathfrak{E}| \cdot |\mathfrak{H}| = \frac{a^2}{\pi c r_0^2} \cos^2\left(\nu t - \frac{\nu r_0}{c}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{n\pi u}{2}\right) \cdot (1 - u^2)^{-1}.$$

Die Mittelwertsbildung über eine Reihe von Schwingungen und die Integration über die ganze Kugel vom Radius r_0 ergibt als Energieverlust durch Strahlung

$$-\frac{dW}{dt} = \frac{a^2}{c} \int_{-1}^{+1} du \cos^2\left(\frac{n\pi u}{2}\right) (1 - u^2)^{-1}$$

$$= \frac{a^2}{4c} \int_{-1}^{+1} du \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right) (1 + \cos \pi n u)$$

$$= \frac{a^2}{2c} \int_{-1}^{+1} \frac{du}{1+u} (1 + \cos \pi n u).$$

Da n eine ungerade ganze Zahl ist, können wir schreiben

$$(186) \qquad -\frac{dW}{dt} = \frac{a^2}{2c} \cdot C_n,$$

wo abkürzungsweise gesetzt ist

$$(186a) \quad C_n = \int_{-1}^{+1} \frac{du}{1+u} \Big(1 - \cos \pi n (1 - u)\Big) = \int_0^{2\pi n} \frac{dx}{x} (1 - \cos x).$$

Es handelt sich noch um die Berechnung dieses transzendenten Integrals. Wir zerlegen dasselbe in vier Integrale:

$$C_n = \int_0^{2\pi n} \frac{dx}{1+x} - \int_{2\pi n}^{\infty} \frac{dx}{x(1+x)} + \int_0^{\infty} dx \left\{\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\cos x}{x}\right\} + \int_{2\pi n}^{\infty} \frac{dx \cos x}{x}$$

und berechnen jedes derselben. Die Summe der beiden ersten ist

$$(186b) \qquad \int_0^{2\pi n} \frac{dx}{1+x} - \int_{2\pi n}^{\infty} \frac{1}{x(1+x)} = ln(2\pi n).$$

Für das dritte Integral schreiben wir

$$(186\text{c})\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{x}\left\{\frac{1}{1+x}-\cos x\right\}=\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(e^{-x}-\cos x\right)$$
$$-\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(e^{-x}-\frac{1}{1+x}\right).$$

Nun folgt aus

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(e^{-x}-\cos x\right)=\int_0^\infty dx\int_0^\infty dy\left\{e^{-x(1+y)}-\cos x e^{-xy}\right\}$$

durch Vertauschung der Integrationsfolge

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(e^{-x}-\cos x\right)=\int_0^\infty dy\left(\frac{1}{1+y}-\frac{y}{1+y^2}\right),$$

wenn die bekannte Formel*) berücksichtigt wird:

$$\int_0^\infty dx e^{-xy}\cos x=\frac{y}{1+y^2}.$$

Es ergibt sich demnach

$$(186\text{d})\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(e^{-x}-\cos x\right)=\frac{1}{2}\left\{ln\frac{(1+y)^2}{1+y^2}\right\}_{y=0}^{y=\infty}=0.$$

Der zweite Bestandteil von (186c) aber läßt sich auf Grund einer von Dirichlet herrührenden Formel**):

$$(186\text{e})\qquad -\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(e^{-x}-\frac{1}{1+x}\right)=-\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}=0{,}577215\ldots$$

mit der Γ-Funktion und mit der sogenannten Eulerschen Konstanten in Verbindung bringen.

---

*) Vgl. z. B. Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen. I § 19, Gl. 2, S. 43.

**) G. L. Dirichlet, Journal f. reine u. angew. Mathem. 15, S. 260. 1836.

Der vierte Term im Ausdruck von C_n endlich läßt sich durch partielle Integration auf die Form einer halbkonvergenten Reihe bringen

$$(186f) \qquad \int_{2\pi n}^{\infty} dx \frac{\cos x}{x} = \frac{1}{(2\pi n)^2} - \frac{3!}{(2\pi n)^4} + \frac{5!}{(2\pi n)^6} - \cdots$$

In dieser Reihe ist der Rest stets kleiner als das letzte beibehaltene Glied; sie ist demnach, wenn man möglichst genau zu rechnen wünscht, mit dem kleinsten Gliede abzubrechen.

Aus (186b, c, d, e, f) folgt jetzt

$$(187) \qquad C_n = ln(2\pi n) + 0{,}577 + \frac{1}{(2\pi n)^2} - \frac{3!}{(2\pi n)^4} + \cdots$$

Durch (186) und (187) bestimmt sich die mittlere sekundliche Gesamtstrahlung der Eigenschwingungen des Drahtes. Dieselbe wächst bei gegebener maximaler Stromamplitude mit der Ordnungszahl der Schwingung; je größer die Ordnungszahl, desto rascher konvergiert die Reihe (187). Für die Grundschwingung findet man den numerischen Wert

$$(187a) \qquad \frac{a^2}{2c} \cdot C_1 = 1{,}22 \cdot \frac{a^2}{c}$$

der mittleren sekundlichen Gesamtstrahlung. Die maximale Stromamplitude a ist dabei elektrostatisch zu messen.

Die hier gegebene Berechnung der Strahlung eines Wellenerregers beruht auf der Annahme, daß die aus der Theorie der stehenden Drahtwellen geläufigen Vorstellungen sich ohne weiteres auf den Erreger übertragen lassen. Es kann bezweifelt werden, ob diese Übertragung von vornherein berechtigt ist. In der Tat, die Frage nach dem zeitlichen Verlaufe der Eigenschwingungen eines Hertzschen Erregers war viele Jahre hindurch eine strittige. Während H. Hertz und V. Bjerknes die Vorstellung vertraten, daß der Erreger nur eine einzige hauptsächlich durch Strahlung gedämpfte Schwingung aussende, schlossen sich andere Forscher einer von Sarasin und de la Rive aufgestellten Hypothese an, indem sie die

Strahlung des Hertzschen Erregers als ein kontinuierliches Spektrum ungedämpfter Schwingungen ansahen. In Anbetracht dieser Sachlage meinte ich, als ich die Behandlung des Problems in Angriff nahm[3]), auf die Analogie der Drahtwellen nicht bauen zu dürfen. Ich zog es vor, auf die Maxwellschen Gleichungen zurückzugehen und durch Integration derselben gleichzeitig das Feld und die Perioden und Dämpfungsdekremente der Eigenschwingungen zu ermitteln. Das gelang für einen stabförmigen Leiter, d. h. für ein sehr gestrecktes Rotationsellipsoid. Es ergab sich die theoretische Möglichkeit einer unendlichen Reihe gedämpfter Eigenschwingungen; ihre Wellenlängen fanden sich in erster Annäherung in Übereinstimmung mit der oben dargelegten elementaren Theorie (Gl. 183d), während die durch die Strahlung bedingten logarithmischen Dekremente der Amplituden durch die Formel dargestellt wurden:

$$\sigma_n = \frac{C_n}{n \cdot ln\left(\frac{2h}{b}\right)}; \tag{187b}$$

dabei ist b der Radius des äquatorialen Leiterquerschnittes C_n die durch (186a) definierte und in (187) ausgewertete Konstante; man bemerkt, daß mit wachsender Ordnungszahl die Amplitudenabnahme während einer Schwingung geringer wird.

Jede einzelne der Eigenschwingungen ist gekennzeichnet durch die Knotenflächen des magnetischen Feldes. Dieses sind konfokale Rotationshyperboloïde, deren Brennpunkte in den Enden des Leiters liegen; dieselben schneiden den Leiter in den Stromknoten (für ungerades n werden diese durch [183b] bestimmt), während ihre Asymptotenkegel die Richtungen angeben, in denen die Strahlung verschwindet (185d für ungerades n). Für alle geradzahligen Eigenschwingungen ist die Äquatorebene eine Knotenebene des magnetischen Feldes; für sie ist die Mitte des Leiters ein Stromknoten und Spannungsbauch; hingegen ist für die oben behandelten ungeradzahligen Eigenschwingungen der äquatoriale Querschnitt ein Strombauch und ein Spannungsknoten.

Die theoretischen Gesetze der Knotenflächen und Bauchflächen des magnetischen Feldes wurden durch die sorgfältigen experimentellen Untersuchungen von F. Kiebitz bestätigt (für $n = 3$). Derselbe stellte das Vorhandensein der ungeradzahligen Oberschwingungen bis $n = 17$ fest, es fehlten hingegen die geradzahligen Eigenschwingungen des Sendedrahtes; entsprechend der angewandten Erregungsweise (Funkenstrecke in der Mitte), bei welcher im Anfange die Spannung in zwei symmetrisch liegenden Punkten des Erregers entgegengesetzt gleich ist, bildeten sich nur diejenigen Eigenschwingungen aus, welche in der Mitte des Drahtes einen Spannungsknoten besitzen.

Wir müssen uns hier ein genaueres Eingehen auf die strenge Theorie des stabförmigen Senders versagen. Die obige mehr elementare Abteilung der Strahlung eines Sendedrahtes habe ich später veröffentlicht, als diese Dinge für die drahtlose Telegraphie von aktueller Bedeutung wurden. Bei der ursprünglichen Marconischen Senderanordnung wird der eine Pol einer Funkenstrecke mit der Antenne, der andere mit der Erde verbunden. Man hat es also hier nicht mit einem frei im Raume schwingenden Draht zu tun, es ist vielmehr die Erde in Betracht zu ziehen. Das kann aber in sehr einfacher Weise geschehen, wenn man mit Rücksicht auf die Wahrnehmung, daß die Wellen nicht merklich in die Erde eindringen, die Erde als gut leitend betrachtet, oder optisch gesprochen, als spiegelnd. Die an der Oberfläche eines vollkommenen Leiters geltende Grenzbedingung, daß die elektrischen Kraftlinien senkrecht stehen, wird, wie die Theorie ergibt, von allen ungeradzahligen Eigenschwingungen des freien Sendedrahtes an der Äquatorebene erfüllt. Spiegelt man die von der Erde senkrecht bis zur Höhe h aufsteigende Sendeantenne an der ebenen Erdoberfläche und zieht die ungeradzahligen Eigenschwingungen des entstandenen geraden Drahtes von der Länge $2h$ in Betracht, so erhält man ein elektromagnetisches Feld, welches an der Erdoberfläche der gestellten Grenzbedingung Genüge leistet; dasselbe ist oberhalb der Erdoberfläche mit demjenigen der wirklichen Sendeantenne identisch. Für die draht-

lose Telegraphie kommt nun hauptsächlich die Grundschwingung in Betracht. Aus unserem Spiegelungsverfahren und aus Gleichung (183c) können wir schließen: **Die Wellenlänge der Grundschwingung einer Sendeantenne ist gleich ihrer vierfachen Höhe.** Die Höhe ist dabei von der Erde an zu rechnen, entsprechend dem Umstande, daß die Spannung des untersten, der Erdoberfläche zugehörigen Punktes der Leitung gleich Null ist. **Das Dämpfungsdekrement der Grundschwingung** ist nach (187a, b)

$$\sigma_1 = \frac{C_1}{ln\left(\frac{2h}{b}\right)} = \frac{2{,}44}{ln\left(\frac{2h}{b}\right)}. \tag{187c}$$

Diese Formel bezieht sich allerdings zunächst auf eine Antenne, deren Querschnitt nach der Spitze hin allmählich abnimmt. Immerhin wird man sie auch auf zylindrische Drähte anwenden können, wie es ja überhaupt auf den genauen Zahlwert des als Argument des Logarithmus auftretenden Quotienten ankommt.

Man erhält z. B. für $b = 0{,}1$ cm, und

für $h = 25$ Meter, $\lambda_1 = 100$ Meter: $\sigma_1 = 0{,}23$,
für $h = 250$ Meter, $\lambda_1 = 1000$ Meter: $\sigma_1 = 0{,}19$.

Meist wird man, bei der Verwendung eines einzelnen Sendedrahtes, mit dem Werte $\sigma_1 = 0{,}2$ des Strahlungsdekrementes rechnen können. Ihm entspricht ein Herabsinken der Wellenamplituden auf den e^{ten} Teil nach fünf ganzen Schwingungen. Dieser immerhin beträchtliche Wert der Dämpfung stimmt mit der allgemeinen Erfahrung überein, wonach die Resonanzkurve einer solchen einfachen Antenne eine ziemlich flache, der Bereich des Ansprechens mithin ein ziemlich weiter ist. Die Bedingungen für eine abgestimmte Telegraphie sind bei dieser einfachsten Anordnung recht ungünstige. Übrigens kommt neben der Dämpfung durch Strahlung diejenige durch Joulesche Wärme in Frage; ihr Betrag ist allerdings verhältnismäßig gering; die Wärmeentwickelung in der metallischen Leitung ist gegen die Ausstrahlung

ganz zu vernachlässigen; höchstens könnte die in der Funkenstrecke entwickelte Wärme in Rechnung zu ziehen sein.

Weitere Ausführungen über die Probleme, die mit der Theorie der elektrischen Wellen und der drahtlosen Telegraphie zusammenhängen, finden sich in dem vom Verfasser dieses Werkes herrührenden Artikel in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (Bd. V. Art. 18), auf den wir hier verweisen müssen.

Zweites Kapitel.

Bewegte Körper.

§ 35. Die erste Hauptgleichung für nicht magnetisierbare Körper.

Wir haben im vorigen Kapitel (§ 28) die Hauptgleichungen der Elektrodynamik ruhender Körper aus der Elektronentheorie abgeleitet; wir sind dabei von den Gleichungen (Ia bis IVa) ausgegangen, welche sich durch Mittelwertsbildung über die Felder der einzelnen Elektronen ergeben hatten. Die auftretenden Mittelwerte $\bar{\mathfrak{h}}$, $\bar{\mathfrak{e}}$ haben wir mit der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$ und der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ identifiziert (Gl. 166, 166a); so ergaben sich die Grundgleichungen:

$$\text{(Ic)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\overline{\varrho \mathfrak{v}},$$

$$\text{(IIc)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t},$$

$$\text{(IIIc)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\bar{\varrho},$$

$$\text{(IVc)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0.$$

Indem wir die Beiträge berechneten, welche die Leitungs-, Polarisations- und Magnetisierungs-Elektronen zu der mittleren Dichte der Elektrizität und des Konvektionsstromes beisteuerten, erhielten wir die Grundgleichungen (Ib bis IVb), welche der Maxwell-Hertzschen Theorie gemäß für ruhende Körper gelten. Es entsteht jetzt die Aufgabe, für bewegte Körper die Grund-

gleichungen der Elektrodynamik aufzustellen. Dabei kann die Maxwell-Hertzsche Theorie nicht mehr als Wegweiser dienen. Denn jene Theorie befindet sich, wie am Schlusse des ersten Bandes gezeigt worden ist, gerade auf dem Gebiete der Elektrodynamik bewegter Körper nicht durchweg in Übereinstimmung mit der Erfahrung. Wir werden von den aufzustellenden Grundgleichungen fordern müssen, daß sie den Ergebnissen der Versuche, die über die elektromagnetischen und optischen Vorgänge in bewegten Körpern angestellt sind, Rechnung tragen.

Wir verstehen unter $\mathfrak{w}$ die Geschwindigkeit der Materie; diese Geschwindigkeit hängt im allgemeinen vom Orte ab. Die experimentell zu erreichenden Geschwindigkeiten sind so klein gegen die Lichtgeschwindigkeit, daß

$$\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2} \text{ klein gegen 1 ist.}$$

Wir werden uns zunächst damit begnügen müssen, für solche „langsamen“ Bewegungen die Grundgleichungen abzuleiten. Verstehen wir unter $\mathfrak{v}'$ die Relativgeschwindigkeit der Elektronen gegen die Materie, so wird die gesamte Geschwindigkeit der Elektronen, die in (Ic) eingeht:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{w} + \mathfrak{v}'. \tag{188}$$

In diesem Paragraphen wollen wir uns auf nicht magnetisierbare Körper beschränken; wir werden demgemäß umlaufende Magnetisierungselektronen außer Betracht lassen und nur Leitungs- und Polarisations-Elektronen berücksichtigen.

Wie in § 28, Gl. 165, sich ergab, ist die mittlere Dichte $\overline{\varrho}$ der Elektrizität mit der Dichte der freien Elektrizität im Maxwellschen Sinne identisch:

$$\overline{\varrho} = \varrho - \operatorname{div} \mathfrak{P}. \tag{188a}$$

Der mittlere Konvektionsstrom der Elektronen setzt sich, gemäß (188), aus zwei Bestandteilen zusammen:

$$\overline{\varrho \mathfrak{v}} = \overline{\varrho} \mathfrak{w} + \overline{\varrho \mathfrak{v}'}; \tag{189}$$

nämlich dem Konvektionsstrom der mit der Materie bewegten freien Elektrizität, und dem von der Bewegung

der Elektronen relativ zur Materie herrührenden Strome. Zu diesem letzteren Strome steuern einerseits die Leitungselektronen, andererseits die Polarisationselektronen bei.

Die relative Bewegung der Leitungselektronen gegen den Körper macht sich als ein Leitungsstrom bemerkbar, dessen Dichte ist

$$\{\overline{\rho \mathfrak{v}'}\}_l = \mathfrak{i}. \tag{189a}$$

Bei der Herstellung des durch $\mathfrak{P}$ gekennzeichneten elektrischen Momentes der Volumeinheit ist durch ein Flächenelement df die Elektrizitätsmenge $\mathfrak{P}_n df$ in dem durch die Normale n angegebenen Sinne hindurchgetreten; das wurde in § 28 nachgewiesen und gilt für einen bewegten Körper genau so wie für einen ruhenden. Es soll nun der Strom bestimmt werden, der von den Polarisationselektronen durch eine ungeschlossene Fläche f des Körpers transportiert wird. War zur Zeit t die mit den Polarisationselektronen durch f geschobene Elektrizität gleich

$$\int \mathfrak{P}_n df,$$

so ist sie zur Zeit $t + dt$ gleich

$$\int \mathfrak{P}_n df + dt \frac{d}{dt} \int \mathfrak{P}_n df.$$

Es ist also der Polarisationsstrom durch die Fläche f des Körpers

$$\int df \{\overline{\rho \mathfrak{v}'}\}_p = \frac{d}{dt} \int \mathfrak{P}_n df = \int df \frac{\partial' \mathfrak{P}_n}{\partial t},$$

wo nach Bd. I, 122 (S. 123) gilt

$$\frac{\partial' \mathfrak{P}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \operatorname{curl} [\mathfrak{P} \mathfrak{w}] + \mathfrak{w} \operatorname{div} \mathfrak{P}.$$

Der Polarisationsstrom durch die Flächeneinheit des bewegten Körpers ist folglich gegeben durch den Vektor

$$\{\overline{\rho \mathfrak{v}'}\}_p = \frac{\partial' \mathfrak{P}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \mathfrak{w} \operatorname{div} \mathfrak{P} + \operatorname{curl} [\mathfrak{P} \mathfrak{w}]. \tag{189b}$$

Hierdurch bestimmt sich auch der von der relativen Bewegung der Polarisationselektronen gegen den Körper her-

rührende Anteil des Stromes (189); der erste, von der Bewegung der Polarisationselektronen mit der Materie herrührende Stromanteil dagegen ist bereits im ersten Gliede von (189) berücksichtigt worden, indem ja, gemäß (188a), zur Dichte $\bar{\varrho}$ der freien Elektrizität auch die Polarisationselektronen einen Beitrag liefern.

Für einen nicht magnetisierbaren Körper ist hiernach die mittlere Dichte des Konvektionsstromes der Elektronen

$$\overline{\varrho \mathfrak{v}} = \bar{\varrho} \mathfrak{w} + \mathfrak{i} + \frac{\partial' \mathfrak{P}}{\partial t}, \tag{189c}$$

oder, mit Rücksicht auf (188a) und (189b)

$$\overline{\varrho \mathfrak{v}} = \varrho \mathfrak{w} + \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \operatorname{curl} [\mathfrak{P} \mathfrak{w}]. \tag{189d}$$

Tragen wir dieses in die erste Hauptgleichung (Ic) ein, indem wir wiederum den Vektor $\mathfrak{D}$ durch

$$4\pi \mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P} \tag{190}$$

definieren, so lautet sie

$$\operatorname{curl} \mathfrak{B} = \frac{4\pi}{c} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \varrho \mathfrak{w} + \mathfrak{i} + \operatorname{curl} [\mathfrak{P} \mathfrak{w}] \right\}. \tag{191}$$

Die erste Hauptgleichung bestimmt hier den curl des Vektors $\mathfrak{B}$ und somit im Verein mit (IVc)

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0 \tag{191a}$$

das Feld des Vektors $\mathfrak{B}$, falls die in der rechten Seite von (191) enthaltenen Stromanteile bekannt sind; dabei handelt es sich um die Bewegung eines nicht magnetisierbaren Körpers. Die Beobachtung des magnetischen Feldes geschieht stets in ruhender, nicht merklich magnetisierbarer Materie, wo $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{H}$ übereinstimmt; es ist demnach auch die magnetometrisch zu messende Feldstärke durch (191) und (191a) eindeutig bestimmt.

In der Hertzschen Elektrodynamik bewegter Körper lautet die erste Hauptgleichung (Bd. I, Gl. 252, S. 439), wenn $\mu = 1$, also $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$ gesetzt wird:

$$\operatorname{curl} \mathfrak{B} = \frac{4\pi}{c} \left\{ \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \varrho \mathfrak{w} + \operatorname{curl} [\mathfrak{D} \mathfrak{w}] \right\}.$$

Wie nach der Hertzschen Theorie, so werden auch nach der Lorentzschen durch den Leitungsstrom, den Verschiebungsstrom und den Konvektionsstrom der wahren Elektrizität magnetische Wirkungen erregt; nur hinsichtlich des vierten Termes der rechten Seite der ersten Hauptgleichung, welcher (Bd. I, § 99) den sogenannten „Röntgenstrom" bestimmt, weicht die Lorentzsche Theorie von der Hertzschen ab. Nach der Hertzschen Theorie bestimmt

$$\operatorname{curl}[\mathfrak{D}\mathfrak{w}],$$

nach der Lorentzschen Theorie

$$\operatorname{curl}[\mathfrak{P}\mathfrak{w}]$$

die Dichte des Röntgenstromes. Gerade diese Forderung der Lorentzschen Theorie war es, welche durch die Versuche von A. Eichenwald ihre experimentelle Bestätigung gefunden hat.

Die Diskussion dieser Experimente ist am besten an die Gl. (189c) anzuknüpfen. Es waren (Bd. I, S. 442) die geladenen Kondensatorplatten zusammen mit dem zwischen ihnen befindlichen Dielektrikum in gleichförmiger Rotation begriffen. Hier ist das elektrische Feld stationär, sei es, daß man es auf ein ruhendes oder auf ein mitrotierendes System bezieht; es ist folglich:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial' \mathfrak{P}}{\partial t} = 0$$

Da ein Leitungsstrom nicht fließt, so folgt aus (189c) und (Ic):

$$\operatorname{curl} \mathfrak{B} = \frac{4\pi}{c} \bar{\varrho} \mathfrak{w}. \tag{191b}$$

Das bei Eichenwalds Versuchen erregte magnetische Feld ist nach der Elektronentheorie, den Gl. (191a, b) gemäß, durch den Konvektionsstrom der freien Elektrizität bestimmt. Dieses war eben die Feststellung Eichenwalds. Nach der Hertzschen Theorie dagegen wäre der allgemeine Ausdruck der ersten Hauptgleichung für einen unmagnetisierbaren Körper

$$\operatorname{curl} \mathfrak{B} = \frac{4\pi}{c}\left\{\mathfrak{i} + \frac{\partial' \mathfrak{D}}{\partial t}\right\};$$

da nun in dem vorliegenden Falle die von dem bewegten Körper aus beurteilte zeitliche Änderung von $\mathfrak{D}$ ebenso wie $\mathfrak{i}$ verschwindet, so würde sich nach H. Hertz überhaupt keine magnetische Wirkung ergeben. Die Versuche von Eichenwald zeigen demnach, daß nicht die Hertzsche, wohl aber die Lorentzsche Elektrodynamik bewegter Körper die erste Hauptgleichung für die hier in Frage kommenden langsamen Bewegungen unmagnetisierbarer Körper richtig formuliert.

§ 36. Die zweite Hauptgleichung.

Die zweite Hauptgleichung der Elektronentheorie (IIc) enthält überhaupt kein von der Bewegung der Materie oder der Elektrizität direkt abhängiges Glied. Sie lautet im Falle der Bewegung ebenso wie im Falle der Ruhe

$$\text{curl}\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}. \tag{192}$$

Diese Form der zweiten Hauptgleichung ist nichts anderes als das Induktionsgesetz, ausgesprochen für ein im Raume festes Flächenelement; denn es stellt $\mathfrak{E}$ die Kraft auf einen ruhenden, mit der Einheit der Ladung versehenen Probekörper dar, während die auf der rechten Seite von (192) auftretende zeitliche Änderung von $\mathfrak{B}$ auf einen festen Raumpunkt sich bezieht.

Es entsteht nun aber die Frage, ob auch für bewegte Körper das Faradaysche Induktionsgesetz (Bd. I, S. 404 ff.), welches ja von der Erfahrung durchweg bestätigt wird, aus den Grundvorstellungen der Elektronentheorie sich ableiten läßt. Um dies zu zeigen, müssen wir auf die Grundgleichung (V) des § 4 zurückgehen, welche die elektromagnetische Kraft $\mathfrak{F}$ bestimmt; es ist in der jetzt angewandten Bezeichnungsweise die auf die Einheit der Ladung wirkende Kraft

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{e} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{h}].$$

Wir betrachten eine Gruppe von Elektronen, welche sich mit der gemeinsamen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegen. Die Mittel-

wertsbildung über ein physikalisch unendlich kleines Gebiet ergibt dann für diese Elektronengruppe die elektromagnetische Kraft

$$\mathfrak{F} = \bar{\mathfrak{e}} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\bar{\mathfrak{h}}] = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}].$$

Wir setzen wieder wie im vorigen Paragraphen

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{w} + \mathfrak{v}',$$

indem wir unter $\mathfrak{w}$ die Geschwindigkeit der Materie, unter $\mathfrak{v}'$ die Geschwindigkeit der Elektronen relativ zur Materie verstehen. Dann wird

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E}' + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}'\mathfrak{B}],$$

wo

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{B}] \tag{193}$$

die Kraft auf eine mit der Materie bewegte Einheitsladung ist.

Der zweite Bestandteil des Vektors $\mathfrak{F}$ kommt beispielsweise bei der Berechnung der mechanischen Kraft zur Geltung, die an einem stromdurchflossenen Drahte angreift.

Uns interessiert indessen hier nur der erste Bestandteil des Vektors $\mathfrak{F}$, den wir mit $\mathfrak{E}'$ bezeichnen; die Gleichung (193), die ihn bestimmt, berücksichtigt die Bewegung der Materie und formuliert das Gesetz der durch Bewegung induzierten elektromotorischen Kraft. In der Tat, nach den Vorstellungen der Elektronentheorie ist $\mathfrak{E}'$ die Kraft, welche an der Einheit der mit dem Körper bewegten Elektrizität angreift, und durch diesen Vektor bestimmt sich der Bewegungsantrieb auf die Elektronen, wie er sich für ruhende Körper durch $\mathfrak{E}$ bestimmt. An Stelle der für ruhende isotrope Leiter geltenden Beziehung $\mathfrak{i} = \sigma\mathfrak{E}$ wird demnach für bewegte Leiter

$$\mathfrak{i} = \sigma\mathfrak{E}' \tag{193a}$$

zu setzen sein; es ist eine plausible Annahme, daß die Leitfähigkeit σ, wenigstens bei „langsamen“ Bewegungen, durch die Bewegung des Leiters nicht geändert wird.

Aus (192) und (193) folgt

$$\text{curl}\,\mathfrak{E}' = -\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \text{curl}\,[\mathfrak{B}\mathfrak{w}]\right\} = -\frac{1}{c}\frac{\partial' \mathfrak{B}}{\partial t}. \tag{193b}$$

Die rechte Seite bestimmt die zeitliche Änderung des Induktionsflusses durch eine bewegte Fläche; aus der allgemeinen Vektorformel (Bd. I, Gl. 122, S. 123) folgt nämlich mit Rücksicht auf die Grundgleichung (IV c), welche das Verschwinden des wahren Magnetismus fordert:

$$\frac{d}{dt}\int df\,\mathfrak{B}_n = \int df\left\{\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \text{curl}\,[\mathfrak{B}\mathfrak{w}]\right\}_n = \int df\,\frac{\partial' \mathfrak{B}_n}{\partial t}.$$

Dem Differentialgesetze (193b) entspricht demnach das Integralgesetz der induzierten elektromotorischen Kraft

$$\int \mathfrak{E}'\,d\mathfrak{s} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int df\,\mathfrak{B}_n. \tag{193c}$$

Das Linienintegral der im bewegten Leiter wirksamen elektrischen Kraft $\mathfrak{E}'$ ist gleich der durch c geteilten zeitlichen Abnahme des umschlungenen Induktionsflusses.

Die Hertzsche Theorie drückt die zweite Hauptgleichung etwas anders aus. Sie setzt (Bd. I, § 94) bei fehlenden eingeprägten Kräften:

$$\text{curl}\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial' \mathfrak{B}}{\partial t},$$

oder

$$\int \mathfrak{E}\,d\mathfrak{s} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int df\,\mathfrak{B}_n.$$

In der Hertzschen Theorie stellt indessen der Vektor $\mathfrak{E}$ nicht den elektrischen Zustand des Raumes, sondern denjenigen der Materie dar; es wird, auch für einen bewegten Leiter, der Leitungsstrom dem Vektor $\mathfrak{E}$ proportional gesetzt:

$$\mathfrak{i} = \sigma\mathfrak{E}.$$

Es weicht die zweite Hauptgleichung der Lorentzschen Theorie von derjenigen der Hertzschen insofern ab, als $\mathfrak{E}'$ an die Stelle von $\mathfrak{E}$ tritt. Während aber bei Hertz der Leitungsstrom im bewegten Körper

proportional zu $\mathfrak{E}$ ist, setzt Lorentz den Leitungsstrom proportional zu $\mathfrak{E}'$. Hinsichtlich der in bewegten Leitern induzierten Ströme stimmt also die Lorentzsche Theorie mit der Hertzschen überein. Die in Bd. I, §§ 91—95 dargelegten Gesetze der Induktion in Leitern, welche durch Messung der induzierten Ströme ihre experimentelle Prüfung und Bestätigung gefunden haben, ergeben sich auch aus den Grundhypothesen der Elektronentheorie.

§ 37. Der Versuch von H. A. Wilson.

Wie liegt nun die Sache, wenn nicht ein Leiter, sondern ein Isolator es ist, der sich im magnetischen Felde bewegt? Nach Hertz ist auch für den bewegten Isolator

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$$

zu setzen, wobei das Hertzsche $\mathfrak{E}$ mit dem Lorentzschen $\mathfrak{E}'$ identisch ist. Die Lorentzsche Theorie würde mit der Hertzschen hinsichtlich der erregten elektrischen Verschiebung übereinstimmen, wenn sie dieselbe proportional zu $\mathfrak{E}'$ setzen würde. Das tut sie indessen keineswegs. Sie unterscheidet vielmehr den vom Raume und den von der Materie beigesteuerten Anteil der elektrischen Verschiebung, entsprechend der Gleichung

$$4\pi\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P}, \tag{194}$$

wobei, nach (IIIc) und (188a), gilt:

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho.$$

Nur der an der Materie haftende Teil der elektrischen Verschiebung, d. h. die Verschiebung der Polarisationselektronen des Körpers wird durch den Vektor $\mathfrak{E}'$ bestimmt. An Stelle der für ruhende isotrope Körper geltenden Beziehung

$$4\pi\mathfrak{P} = (\varepsilon - 1)\mathfrak{E}$$

tritt für bewegte Isolatoren

$$4\pi\mathfrak{P} = (\varepsilon - 1)\mathfrak{E}',$$

so daß die gesamte elektrische Verschiebung in einem bewegten Dielektrikum gegeben wird durch

$$4\pi\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + (\varepsilon - 1)\mathfrak{E}'. \tag{194a}$$

Wir wollen uns auf nicht magnetisierbare Dielektrika beschränken. Für solche ist im Falle der Ruhe $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{H}$ identisch. Welches im Falle der Bewegung der Zusammenhang zwischen diesen beiden Vektoren ist, wissen wir nicht. Doch weichen sie gewiß, wenn überhaupt, so nur um Größen erster Ordnung in $|\mathfrak{w}|/c$ voneinander ab. Wir begehen also nur einen Fehler zweiter Ordnung — und ein solcher ist auch bei den vorhergehenden Entwickelungen zugelassen worden —, wenn wir im Ausdruck (193) von $\mathfrak{E}'$ an Stelle von $\mathfrak{B}$ jetzt $\mathfrak{H}$ setzen. Dann wird

$$4\pi\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}' - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{H}], \tag{194b}$$

oder auch

$$4\pi\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E} + \frac{(\varepsilon - 1)}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{H}]. \tag{194c}$$

Die experimentelle Prüfung dieser von der Elektronentheorie geforderten Beziehung bildete den Gegenstand einer Arbeit von H. A. Wilson.[70]) Dieser Forscher ließ einen dielektrischen hohlen Zylinder in einem der Achse parallelen magnetischen Felde rotieren. Die metallischen Belegungen der inneren und äußeren Begrenzungsflächen waren durch Gleitkontakte mit den Quadranten eines Elektrometers verbunden; die innere Belegung war gleichzeitig geerdet. Die infolge der Rotation sich herstellende radiale elektrische Verschiebung gibt zu einer wahren Ladung der Zylinderbelegungen Veranlassung; dieselbe bestimmt sich auf Grund von (194c) folgendermaßen: $\mathfrak{E}$, die Kraft auf die ruhende Einheit der Ladung, leitet sich aus dem elektrostatischen Potentiale der freien Elektrizität ab. Ferner ist $\mathfrak{w}$ senkrecht zu $\mathfrak{H}$ gerichtet; sein Betrag ist gleich $u \cdot r$, wo u die Winkelgeschwindigkeit, r der Abstand von der Achse ist. Mithin ist

$$4\pi\mathfrak{D}_r = -\varepsilon\frac{d\varphi}{dr} \pm (\varepsilon - 1)\cdot\frac{ur}{c}\cdot|\mathfrak{H}|. \tag{194d}$$

Das zweite Glied wechselt bei Umkehrung des magnetischen Feldes das Vorzeichen. Ist h die Höhe des Zylinders und e die

Ladung seiner inneren Belegung, a und b die Querschnittsradien der äußeren und inneren Belegung, so ist

$$4\pi \mathfrak{D}_r = \frac{2e}{hr}.$$

Da nun konzentrische Zylinder des Dielektrikums von derselben Verschiebung e durchsetzt werden, so ergibt die Integration von (194d) zwischen den Grenzen b und a:

$$e \cdot \frac{2}{\varepsilon h} \cdot ln\left(\frac{a}{b}\right) = \varphi_1 - \varphi_2 \pm \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{u}{2c} \cdot |\mathfrak{H}| \cdot (a^2 - b^2)$$

oder

$$\frac{e}{K} = \varphi_1 - \varphi_2 \pm E^i, \tag{194e}$$

wo K die Kapazität des dielektrischen Zylinders ist und

$$E^i = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{u}{2c}|\mathfrak{H}|(a^2 - b^2). \tag{194f}$$

Die Ladung der Innenseite des äußeren Zylinders ist $-e$; folglich ist $+e$ die Ladung seiner Außenseite, des mit ihr verbundenen Quadranten des Elektrometers und des Leitungsdrahtes zusammen; der andere Quadrant ist zur Erde abgeleitet. Ist K' die Kapazität dieses ganzen Systems, so hat man

$$\frac{e}{K'} = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Hieraus und aus (194d) folgt

$$\pm E^i = (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \frac{K + K'}{K}, \tag{194g}$$

so daß aus der gemessenen Potentialdifferenz der Quadranten und den Konstanten des Apparates die Größe E^i sich ermitteln und so die experimentelle Prüfung der von der Elektronentheorie geforderten Beziehung (194f) sich durchführen läßt.

Die messenden Versuche H. A. Wilsons bestätigen nun durchaus die Gültigkeit dieser Beziehung; mit der Hertzschen Theorie hingegen sind sie nicht zu vereinbaren (diese setzt in (194c) ε an Stelle von $\varepsilon - 1$, mithin in (194f) 1 an Stelle

von $1 - \frac{1}{\varepsilon}\big)$. Wir können also aus den Versuchen von H. A. Wilson schließen, daß zwar die Lorentzsche, nicht aber die Hertzsche Elektrodynamik bewegter Körper die Beziehung zwischen den Feldstärken und der elektrischen Verschiebung für die hier in Frage kommenden langsamen Bewegungen nicht magnetisierbarer Körper richtig wiedergibt.

§ 38. Die allgemeinen Feldgleichungen für bewegte Körper.

Wir haben uns bisher bei der Ableitung der Grundgleichungen für die bewegte Materie auf nicht magnetisierbare Körper beschränkt. Es läge nun am nächsten, wie im Falle der Ruhe, so auch im Falle der Bewegung durch Einführung der Magnetisierungselektronen die Grundgleichungen zu verallgemeinern; dies war in der früheren Auflage, in Anlehnung an H. A. Lorentz[31]), geschehen.

Doch können wir uns nicht verhehlen, daß gerade die magnetischen Eigenschaften der Körper von der Elektronentheorie bisher noch nicht befriedigend erklärt werden (vgl. § 31). Daher ist es gewagt, die elektronentheoretischen Vorstellungen von der Magnetisierung der Körper zur Begründung der elektrodynamischen Feldgleichungen für bewegte Körper heranzuziehen. Hier scheint eine mehr phänomenologische Auffassung passender, wie sie neuerdings von H. Minkowski[38]) und schon seit längerer Zeit von E. Cohn[8]) vertreten wird.

H. Minkowski behält auch für solche Körper, deren magnetische Permeabilität nicht gleich 1 ist, die Relationen (193), (193a) und (194b) bei:

$$\mathfrak{i} = \sigma\, \mathfrak{E}', \tag{195}$$

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{B}], \tag{195a}$$

$$4\pi\mathfrak{D} = \varepsilon\,\mathfrak{E}' - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{H}], \tag{195b}$$

und stellt den beiden letzten Beziehungen die im Sinne der

Hertz-Heavisideschen Analogie ihnen entsprechenden an die Seite:

$$(195\text{c}) \qquad \mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\, 4\pi \mathfrak{D}],$$

$$(195\text{d}) \qquad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}' + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{E}].$$

Indem so die sechs Vektoren: $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{B}$ durch die vier Relationen (195a—d) verknüpft sind, wird nach Minkowski der Verlauf elektromagnetischer Vorgänge in einem Körpersystem von gegebener Bewegung durch die Grundgleichungen beschrieben:

$$(\text{Id}) \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\left\{\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \varrho \mathfrak{w} + \mathfrak{i}\right\},$$

$$(\text{IId}) \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t},$$

$$(\text{IIId}) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho,$$

$$(\text{IVd}) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0.$$

Für den Fall $\mu = 1$ folgt aus (195c,d):

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}, 4\pi\mathfrak{D} - \mathfrak{E}],$$

während, nach (195a,b), allgemein ist:

$$4\pi\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + (\varepsilon - 1)\mathfrak{E}' + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}, \mathfrak{B} - \mathfrak{H}].$$

Man begeht also nur einen Fehler von der Ordnung $|\mathfrak{w}|^2/c^2$, wenn man setzt:

$$4\pi\mathfrak{D} - \mathfrak{E} = 4\pi\mathfrak{P} = (\varepsilon - 1)\mathfrak{E}'$$

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}[\mathfrak{P}\mathfrak{w}].$$

Die erste dieser Beziehungen war es, von der wir in § 37, bei der Theorie des Wilsonschen Versuches, ausgingen. Die zweite Beziehung zeigt, daß für langsame Bewegungen nicht magnetisierbarer Körper die Form (Id) der ersten Hauptgleichung mit der in § 35 zugrunde gelegten Form (191) identisch ist, die dort zur Deutung der Versuche Eichenwalds über den Röntgenstrom diente. Die experimentellen Ergebnisse,

von denen in den Paragraphen 35 bis 37 die Rede war, werden alle durch das aufgestellte Gleichungssystem erklärt.

Um zu Feldgleichungen zu gelangen, welche allgemein die elektromagnetischen Vorgänge in langsam bewegten para- oder dia-magnetischen Körpern beschreiben, drücken wir auf Grund von (195a—d), unter Elimination der Vektoren $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ durch $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ aus; wir erhalten, unter Vernachlässigung von Größen der Ordnung $|\mathfrak{w}|^2/c^2$:

$$\text{(Vd)} \qquad \mathfrak{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\mathfrak{D} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)\frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{B}],$$

$$\text{(VId)} \qquad \mathfrak{H} = \frac{1}{\mu}\mathfrak{B} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)\frac{1}{c}[\mathfrak{w}\,4\pi\mathfrak{D}].$$

Die Einführung von (Vd) und (VId) in die Hauptgleichungen (IId) und (Id) führt zu Feldgleichungen für die Vektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$, welche, bei geeigneten Anfangs- und Grenzdaten, den Ablauf eines elektromagnetischen Vorganges für Dielektrika ($\mathfrak{i} = 0$) eindeutig bestimmen. Für bewegte Dielektrika ist (Vd) bei dem Versuche von H. A. Wilson, (VId) bei dem Versuche von Eichenwald Gegenstand der experimentellen Prüfung. Hier ist der Einfluß der magnetischen Permeabilität entsprechend den Minkowskischen — und, wie wir sogleich sehen werden, auch den Cohnschen — Grundgleichungen zur Formulierung gelangt. An Stelle des Koeffizienten

$$1 - \frac{1}{\varepsilon\mu} \text{ bei E. Cohn und H. Minkowski}$$

würde zu setzen sein

$$1 - \frac{1}{\varepsilon} \text{ nach H. A. Lorentz,}$$

$$1 \qquad \text{nach H. Hertz.}$$

Während jene Experimente gegen die Hertzsche Elektrodynamik bewegter Körper entscheiden, reicht ihre Genauigkeit nicht aus, um die Entscheidung zwischen den Ansätzen von Cohn und Minkowski und denen von H. A. Lorentz zu geben; denn für Dielektrika

ist μ so wenig von 1 verschieden, daß sich die Abweichung in den Werten der Koeffizienten der Beobachtung entzieht.

Führt man in (Id) den auf mitbewegte Flächen bezogenen Verschiebungsstrom ein:

$$\frac{\partial' \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{w} \operatorname{div} \mathfrak{D} + \operatorname{curl} [\mathfrak{D} \mathfrak{w}],$$

und entsprechend in (IId) den Induktionsfluß durch mit der Materie bewegte Flächen:

$$\frac{\partial' \mathfrak{B}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \mathfrak{w} \operatorname{div} \mathfrak{B} + \operatorname{curl} [\mathfrak{B} \mathfrak{w}],$$

und beachtet (IIId, IVd) sowie (195a, c), so ergibt sich eine andere Form der Minkowskischen Grundgleichungen:

$$\text{(Ie)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{H}' = \frac{4\pi}{c} \left\{ \frac{\partial' \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{i} \right\},$$

$$\text{(IIe)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial' \mathfrak{B}}{\partial t},$$

$$\text{(IIIe)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho,$$

$$\text{(IVe)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0.$$

Hier sind nun die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ herausgefallen, während sie in den Gl. (195a—d), die nach Minkowski auch für rasch bewegte Körper strenge Gültigkeit beanspruchen, noch enthalten sind.

Beschränkt man sich indessen auf langsame Bewegungen der Materie, bei denen es erlaubt ist, Größen der Ordnung $|\mathfrak{w}|^2/c^2$ zu vernachlässigen, so darf man, in (195b, d), statt $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{E}'$ mit $\mathfrak{w}$ vektoriell multiplizieren; dann wird:

$$\text{(Ve)} \qquad 4\pi \mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}' - \frac{1}{c} [\mathfrak{w} \mathfrak{H}'],$$

$$\text{(VIe)} \qquad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}' + \frac{1}{c} [\mathfrak{w} \mathfrak{E}'].$$

Damit sind wir zu dem Gleichungssystem gelangt, welches E. Cohn[8]) der Elektrodynamik bewegter Körper zugrunde legt. Für langsame Bewegungen stimmt es mit dem Minkowskischen überein und umfaßt somit gleich-

falls die bei Bewegung der Materie relativ zur Erde gewonnenen Ergebnisse elektrodynamischer Versuche. Auf die Theorie des Fizeauschen Versuches gehen wir im nächsten Paragraphen ein; am Schlusse des Bandes behandeln wir dann die Elektrodynamik schneller Bewegungen, insbesondere der Bewegung der Erde im Weltenraume, wobei die Minkowskischen und die Cohnschen Grundgleichungen nicht mehr miteinander übereinstimmen.

Was die Bedingungen an der Grenzfläche zweier bewegter Körper anbelangt, so folgen diese aus den Hauptgleichungen (Ie, IIe), indem man von dem allgemeinen Falle eines stetigen Überganges zwischen den Körpern ausgeht und die Diskontinuität als Grenzfall betrachtet. Werden die Materialkonstanten und damit auch die räumlichen Dichten $\mathfrak{i}$ des Leitungsstromes und $\frac{\partial' \mathfrak{D}}{\partial t}$ des Verschiebungsstromes (durch mitbewegte Flächen) als endlich angenommen, so folgt aus (Ie): **An der Grenzfläche zweier bewegter Körper ist der Flächenwirbel (Bd. I, § 29) des Vektors $\mathfrak{H}'$ gleich Null**; dementsprechend ergibt sich aus (IIe): **Der Flächenwirbel des Vektors $\mathfrak{E}'$ ist gleich Null.** Es verhalten sich also die Tangentialkomponenten der Vektoren $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ stetig.

Ein Ausnahmefall liegt vor, wenn man den idealen Grenzfall eines vollkommenen Leiters (oder Spiegels) in Betracht zieht, d. h. (vgl. Bd. I, § 78) eines Körpers von der Leitfähigkeit $\sigma = \infty$. Hier kann die räumliche Dichte $\mathfrak{i}$ des Leitungsstromes unendlich, seine Flächendichte $\mathfrak{j}$ endlich werden; in das Innere des vollkommenen Leiters dringt das Feld nicht ein. Aus der Beziehung, welche der ersten Hauptgleichung (Ie) gemäß zwischen $\mathfrak{j}$ und dem Flächenwirbel von $\mathfrak{H}'$ besteht, folgt:

$$[\mathfrak{H}'\mathfrak{n}] = \frac{4\pi}{c}\mathfrak{j}. \tag{196}$$

Dabei ist $\mathfrak{n}$ ein Einheitsvektor, welcher die nach dem Innern des Leiters weisende Normalenrichtung anzeigt, und es bezieht sich $\mathfrak{H}'$ auf die Oberfläche des Leiters. Ähnlich folgt

aus (IIIe) zwischen der Flächendichte ω der Elektrizität und dem Vektor $\mathfrak{D}$ an der Leiteroberfläche die Beziehung

$$-(\mathfrak{D}\mathfrak{n}) = \omega. \tag{196a}$$

Auch an der Oberfläche des idealen Leiters ist nach (IIe) der Flächenwirbel von $\mathfrak{E}'$, nach (IVe) die Flächendivergenz von $\mathfrak{B}$ gleich Null. Da nun im Innern des Leiters kein Feld besteht, so folgen für die Werte jener Vektoren an der Oberfläche die Bedingungen

$$[\mathfrak{E}'\mathfrak{n}] = 0, \tag{196b}$$

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{n}) = 0. \tag{196c}$$

Dieses sind die an der Oberfläche eines bewegten vollkommenen Spiegels vorzuschreibenden Grenzbedingungen.

§ 39. Der Versuch von Fizeau.

Über die Fortpflanzung des Lichtes in strömendem Wasser ist von Fizeau ein Versuch angestellt worden; von Michelson und Morley wiederholt, stellt dieser Versuch ein Experimentum crucis dar, welches gegen die Hertzsche Optik bewegter Körper entscheidet. Wir wollen nicht versäumen, die Theorie dieses Versuches aus den Feldgleichungen des vorigen Paragraphen abzuleiten.

Bei den Versuchen gelangten zwei Lichtbündel zur Interferenz, welche zwei parallele Röhren durchsetzt hatten. Wurde das in den beiden Röhren enthaltene Wasser in entgegengesetzten Richtungen in Strömung versetzt, so erfolgte eine Verschiebung der Interferenzstreifen; aus dem Betrage der Verschiebung konnte die Veränderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes infolge der Bewegung des Wassers ermittelt und mit der Theorie verglichen werden.

Es handelt sich also hier um Lichtwellen, welche parallel der Geschwindigkeitsrichtung, oder in dem entgegengesetzten Sinne sich fortpflanzen. Wir legen die z-Achse in die Bewegungsrichtung des Wassers, setzen $\frac{|\mathfrak{w}|}{c} = \beta$ und betrachten

zunächst einen geradlinig polarisierten Lichtstrahl, in dem die elektrischen Schwingungen der x-Achse, die magnetischen der y-Achse parallel erfolgen.

Die Hauptgleichungen (Ie, IIe) ergeben für Nichtleiter

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}'_y}{\partial z} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial' \mathfrak{D}_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}'_x}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial' \mathfrak{B}_y}{\partial t}. \tag{197}$$

Dabei gelten, nach E. Cohn strenge, nach Minkowski bei Vernachlässigung von β^2, die Beziehungen (Ve, VIe):

$$4\pi \mathfrak{D}_x = \varepsilon \mathfrak{E}'_x + \beta \mathfrak{H}'_y, \tag{197a}$$

$$\mathfrak{B}_y = \mu \mathfrak{H}'_y + \beta \mathfrak{E}'_x. \tag{197b}$$

Wir verstehen unter ν' die Zahl der Lichtschwingungen, gemessen in einem Punkt des bewegten Wassers, unter w' die gesuchte Geschwindigkeit des Lichtes relativ zum Wasser und bringen dementsprechend die Abhängigkeit der Feldkomponenten von t und z für einen Punkt des Wassers durch dem komplexen Faktor zum Ausdruck:

$$e^{i\nu'\left(t - \frac{z}{w'}\right)}$$

Da in (197) die Differentialquotienten nach der Zeit sich ebenfalls auf einen Punkt der bewegten Materie beziehen, so folgen, mit Rücksicht auf (197a, b), die in $\mathfrak{E}'_x$, $\mathfrak{H}'_y$ homogenen Gleichungen

$$\begin{cases} n' \mathfrak{H}'_y = \varepsilon \mathfrak{E}'_x + \beta \mathfrak{H}'_y, \\ n' \mathfrak{E}'_x = \mu \mathfrak{H}'_y + \beta \mathfrak{E}'_x, \end{cases} \tag{198}$$

wobei, abkürzungsweise, gesetzt ist:

$$n' = \frac{c}{w'}. \tag{198a}$$

Es resultiert für n' die Gleichung

$$(n' - \beta)^2 = \varepsilon \mu = n^2, \tag{198b}$$

wo n den Brechungsindex für Lichtwellen dieser Schwingungszahl in ruhendem Wasser darstellt. Die Maxwellsche Relation, die hier herangezogen ist, würde zwar nur für ein dispersionsfreies Medium gelten. Für einen Körper mit Disper-

sion ist dann ε oder μ, oder es sind beide Größen als Funktionen der Schwingungszahl des Lichtes zu betrachten, derart daß das Produkt beider der Dispersionskurve des Körpers entspricht. Dem Brechungsindex n für den Fall der Ruhe ordnen sich für den Fall der Bewegung nach (198b) zwei Werte von n' zu:

$$n' = n + \beta \text{ bzw. } n' = -(n - \beta), \tag{199}$$

von denen der erste einer Lichtfortpflanzung parallel, der zweite entgegen der Strömung des Wassers entspricht.

Nehmen wir den ersten Wert und vernachlässigen Größen der Ordnung β^2, so bestimmt sich durch

$$\frac{w'}{c} = \frac{1}{n'} = \frac{1}{n} - \frac{\beta}{n^2} \tag{199a}$$

die Relativgeschwindigkeit der Wellen gegen das strömende Wasser.

Die Geschwindigkeit der Lichtwellen, welche ein ruhender Beobachter wahrnimmt, ist demnach w'', wo

$$\frac{w''}{c} = \frac{w'}{c} + \beta = \frac{1}{n} + \beta\left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \tag{200}$$

Der Fall der Lichtfortpflanzung entgegen der Strömungsrichtung des Wassers ergibt sich durch Vorzeichenwechsel von β.

Nach der Hertzschen Theorie würde die Relativgeschwindigkeit der Wellen gegen das strömende Wasser dieselbe sein wie gegen ruhendes Wasser. Die Wellen würden bei der Bewegung einfach mitgeführt werden. Nach der soeben entwickelten Theorie ist das nicht der Fall; infolge der Bewegung des Wassers wird die Geschwindigkeit des parallel sich fortpflanzenden Lichtes nicht um $|\mathfrak{w}|$, sondern nur um einen Bruchteil von $|\mathfrak{w}|$ vermehrt. Der Faktor $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ in Gleichung (200), der diesen Bruch angibt, wird der „Fresnelsche Fortführungskoeffizient“ genannt. Fresnel war es, der zuerst die Annahme ruhenden Äthers vertrat, welche dann von H. A. Lorentz der elektromagnetischen Optik bewegter Körper

zugrunde gelegt wurde. Nach der Theorie von H. A. Lorentz, deren Ansätze für nicht magnetisierbare Körper mit denjenigen von E. Cohn und H. Minkowski übereinstimmen, entspricht der Fortführungskoeffizient durchaus dem Faktor $\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)$, welcher in der Theorie des Versuches von H. A. Wilson eine Rolle spielt; er rührt, nach der Auffassung der Elektronentheorie, daher, daß nur der an der Materie haftende Bruchteil der elektrischen Verschiebung durch die Bewegung der Materie im magnetischen Felde beeinflußt wird. Die Versuche von Fizeau, Michelson und Morley, welche die Gültigkeit jenes Ausdruckes für den Fortführungskoeffizienten bewiesen haben, zeigen, daß die im vorigen Paragraphen aufgestellten Grundgleichungen der Elektrodynamik auch die Optik bewegter Körper umfassen.

Dabei kommen zwar die Unterschiede in den Theorien von H. A. Lorentz und von E. Cohn und H. Minkowski nicht wesentlich in Betracht, da bei den rasch wechselnden Feldern der Lichtwellen die para- und dia-magnetischen Eigenschaften der Dielektrika ohne Einfluß sind. Immerhin ist es bemerkenswert, daß nach Cohn und Minkowski auch für den Fall $\mu \gtrless 1$ der Fresnelsche Koeffizient durch den Brechungsindex des Körpers bestimmt ist, während er nach H. A. Lorentz nur von der Dielektrizitätskonstante abhängen würde. Wir erkennen hier den Fresnelschen Koeffizienten als denjenigen wieder, durch dessen Wert wir die verschiedenen Theorien der Elektrodynamik langsam bewegter Körper in § 38 kennzeichnen konnten.

§ 40. Der Druck der Strahlung auf bewegte Flächen.

Wir haben bereits in § 5 dieses Bandes von dem elektromagnetischen Lichtdruck gesprochen. Die Gesetze des Lichtdruckes sind von grundlegender Bedeutung für die thermodynamische Theorie der Wellenstrahlung. Wir dürfen daher nicht versäumen, diese Gesetze hier zu entwickeln; auch dürfen wir uns nicht auf ruhende Flächen beschränken, sondern wir müssen die Betrachtungen auf bewegte Flächen ausdehnen.

Zwei Arten von Flächen sind es, die in der Strahlungstheorie eine Rolle spielen: Die vollkommen schwarzen und die vollkommen spiegelnden Flächen. Beide Arten von Flächen lassen die Lichtwellen nicht in ihr Inneres eindringen. Die schwarze Fläche gibt nicht zur Bildung reflektierter Wellen Veranlassung; sie verwandelt die Energie der auffallenden Strahlung vollständig in Wärme oder in Arbeit des Strahlungsdruckes, die Bewegungsgröße der auffallenden Strahlung in mechanische Bewegungsgröße des eingeschlossenen Körpers. Die vollkommen spiegelnde oder vollkommen „blanke“ Fläche hingegen verwandelt nicht den geringsten Bruchteil der auffallenden Strahlung in Wärme. Die Energie des einfallenden Lichtes findet sich, soweit sie nicht in Arbeit des Strahlungsdruckes an der spiegelnden Fläche verwandelt ist, in dem reflektierten Lichte wieder; die Bewegungsgrößen des einfallenden und des reflektierten Lichtes bestimmen den Betrag des Strahlungsdruckes. Flächen von solchen Eigenschaften finden sich als Oberflächen wirklicher Körper in der Natur nur angenähert realisiert. Auch die besten Spiegel sind nicht vollkommen blank, und die im auffallenden Lichte schwärzesten Flächen sind nicht absolut schwarz. Immerhin ist die Idealisierung, welche sich die Theorie erlaubt, indem sie von vollkommen blanken oder vollkommen schwarzen Flächen spricht, nicht bedenklicher als die Annahme starrer Körper in der Mechanik, idealer Gase oder idealer verdünnter Lösungen in der Thermodynamik. Diese Idealisierung ermöglicht es, sich bei der Ableitung der Strahlungsgesetze von den individuellen Eigenschaften der Körper unabhängig zu machen. In der Tat sind die Entwickelungen der folgenden Paragraphen unabhängig von jeder besonderen Hypothese über die Zahl und die Eigenschaften der Moleküle und der Elektronen. Sie beruhen allein auf den Grundhypothesen der Elektronentheorie, welche in den Grundgleichungen (I bis V) des § 4 ihre mathematische Formulierung gewonnen haben. Die Grenzbedingungen an der Oberfläche des vollkommenen Spiegels, welche wir am

Schlusse des § 38 aufgestellt hatten, gelten für beliebige Geschwindigkeiten des Spiegels, wenn anders jene Grundgleichungen die Einwirkung der Leitungselektronen des Spiegels auf die elektromagnetischen Vorgänge im Raume richtig formulieren.

Wie bereits in § 5 erwähnt wurde, bestimmt sich für vollkommen schwarze und vollkommen spiegelnde Flächen, welche im leeren Raume ruhen, die ponderomotorische Kraft des Feldes vollständig durch den in Gleichung (17) angegebenen Vektor

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{8\pi}\left\{2\mathfrak{E}\mathfrak{E}_n + 2\mathfrak{H}\mathfrak{H}_n - \mathfrak{n}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\right\}$$

{$\mathfrak{n}$ ist ein der äußeren Normalen n paralleler Einheitsvektor}.

Diese Flächenkraft ist nichts anderes als die auf die Flächeneinheit bezogene Resultierende der Maxwellschen Spannungen. Würde es sich um einen Körper handeln, in dessen Inneres das elektromagnetische Feld eindringt, so würde, wie in § 5 dargelegt wurde, bei der Berechnung der resultierenden elektromagnetischen Kraft noch die zeitliche Änderung der im Körper enthaltenen elektromagnetischen Bewegungsgröße in Rechnung zu setzen sein. Für solche Körper jedoch, die von absolut schwarzen oder blanken Flächen umschlossen sind, fällt dieses Glied der resultierenden Kraft fort. Die resultierende Kraft des elektromagnetischen Feldes ergibt sich durch Integration der Flächenkraft $\mathfrak{T}$ über die Oberfläche des ruhenden Körpers.

Wie ändert sich nun der Wert der Flächenkraft, wenn der Körper sich im Vakuum bewegt? Dann erhält die Flächenkraft einen Zuwachs, da Bewegungsgröße infolge der Bewegung aufgefangen wird. Ist $\mathfrak{w}$ die Geschwindigkeit des betreffenden Punktes der schwarzen oder blanken Fläche, so ist die von dem Flächenelemente df bei seiner Bewegung in der Sekunde aufgefangene elektromagnetische Bewegungsgröße

$$\mathfrak{w}_n \mathfrak{g}\, df.$$

Diesen Zuwachs erfährt die an df angreifende elektromagnetische Kraft durch die Bewegung des Flächenelementes

Es folgt für die auf die bewegte Flächeneinheit bezogene Kraft des Strahlungsdruckes

$$\mathfrak{T}' = \mathfrak{T} + \mathfrak{w}_n \mathfrak{g}. \tag{201}$$

Aus (17) und (18) erhalten wir den Ausdruck des Vektors $\mathfrak{T}'$ durch die elektromagnetischen Vektoren

$$8\pi\mathfrak{T}' = 2\mathfrak{E}\mathfrak{E}_n + 2\mathfrak{H}\mathfrak{H}_n - \mathfrak{n}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) + \frac{2\mathfrak{w}_n}{c}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]. \tag{201a}$$

Für einen bewegten Körper, der von einer absolut schwarzen oder blanken Fläche begrenzt ist, ergibt sich die resultierende Kraft der Strahlung durch Integration von $\mathfrak{T}'$ über die Oberfläche.

Wir wollen den erhaltenen Ausdruck noch etwas umformen. Wir gehen dabei aus von der Identität

$$\mathfrak{w}_n[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] + \mathfrak{E}_n[\mathfrak{H}\mathfrak{w}] + \mathfrak{H}_n[\mathfrak{w}\mathfrak{E}] = \mathfrak{n}(\mathfrak{w}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]). \tag{202}$$

Diese beweist man, indem man die Komponente nach irgendeiner Richtung nimmt, die man mit der x-Achse zusammenfallen lassen kann. Es ist

$$\mathfrak{w}_n[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_x + \mathfrak{E}_n[\mathfrak{H}\mathfrak{w}]_x + \mathfrak{H}_n[\mathfrak{w}\mathfrak{E}]_x = \begin{vmatrix} \mathfrak{w}_n & \mathfrak{w}_y & \mathfrak{w}_z \\ \mathfrak{E}_n & \mathfrak{E}_y & \mathfrak{E}_z \\ \mathfrak{H}_n & \mathfrak{H}_y & \mathfrak{H}_z \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante jedoch ist gleich

$$\cos(nx)\begin{vmatrix} \mathfrak{w}_x & \mathfrak{w}_y & \mathfrak{w}_z \\ \mathfrak{E}_x & \mathfrak{E}_y & \mathfrak{E}_z \\ \mathfrak{H}_x & \mathfrak{H}_y & \mathfrak{H}_z \end{vmatrix} = \mathfrak{n}_x(\mathfrak{w}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]),$$

d. h. gleich der x-Komponente der rechten Seite von (202).

Drückt man nun den letzten Term in (201a) in der durch (202) angezeigten Weise aus, so erhält man

$$8\pi\mathfrak{T}' = 2\mathfrak{E}'\mathfrak{E}_n + 2\mathfrak{H}'\mathfrak{H}_n - \mathfrak{n}\left\{\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2 - \frac{2}{c}(\mathfrak{w}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}])\right\}, \tag{202a}$$

wo $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ die Vektoren sind:

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{H}], \quad \mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{E}]. \tag{203}$$

Man überzeugt sich übrigens leicht davon, daß diese Vektoren mit den in § 38 ebenso bezeichneten identisch sind; für den Fall

$$\varepsilon = 1, \quad \mu = 1$$

folgen aus den Relationen (195a—d) ebenfalls die in (203) angegebenen Ausdrücke von $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{H}'$, und es folgt gleichzeitig:

$$4\pi\mathfrak{D} = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{H}.$$

Aus (203) erhält man

$$\mathfrak{E}\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}^2 - \frac{1}{c}(\mathfrak{w}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]), \tag{203a}$$

$$\mathfrak{H}\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}^2 - \frac{1}{c}(\mathfrak{w}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]); \tag{203b}$$

auf Grund von (202a) ergibt sich

$$8\pi\mathfrak{T}' = 2\mathfrak{E}'\mathfrak{E}_n + 2\mathfrak{H}'\mathfrak{H}_n - \mathfrak{n}\{\mathfrak{E}\mathfrak{E}' + \mathfrak{H}\mathfrak{H}'\} \tag{204}$$

als allgemeiner Ausdruck der elektromagnetischen Flächenkraft durch die elektromagnetischen Vektoren.

Handelt es sich um eine bewegte schwarze Fläche, so sind für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die Feldstärken der einfallenden Wellen zu setzen; denn reflektierte Wellen sind hier definitionsgemäß ausgeschlossen. Anders bei dem bewegten Spiegel. Hier erfolgt die Reflexion so, daß an allen Punkten der spiegelnden Fläche die Grenzbedingungen (196b, c) erfüllt sind, welche das Verschwinden der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}'$ und der Normalkomponente von $\mathfrak{B}$ verlangen. Hier, wo der Spiegel sich im leeren Raume bewegt, ist an seiner Oberfläche $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{H}$ identisch, wie wir soeben bemerkten. Da nun

$$\mathfrak{H}_n = 0, \quad [\mathfrak{E}'\mathfrak{n}] = 0$$

und somit (vgl. Bd. I, Formel δ, S. 452)

$$0 = \big[\mathfrak{E}[\mathfrak{E}'\mathfrak{n}]\big] = \mathfrak{E}'\mathfrak{E}_n - \mathfrak{n}(\mathfrak{E}\mathfrak{E}'),$$

so erhalten wir

$$8\pi\mathfrak{T}' = \mathfrak{n}\{\mathfrak{E}\mathfrak{E}' - \mathfrak{H}\mathfrak{H}'\} \tag{204a}$$

oder auch, mit Rücksicht auf (203a, b)

$$8\pi\mathfrak{T}' = \mathfrak{n}\{\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{H}^2\}. \tag{204b}$$

Jede dieser beiden letzten Formeln bestimmt die Flächenkraft des elektromagnetischen Feldes auf einen beliebig bewegten Spiegel. Da $\mathfrak{n}$ ein der äußeren Normalen paralleler Einheitsvektor ist, so ist die Flächenkraft $\mathfrak{T}'$ stets senkrecht zur spiegelnden Fläche gerichtet. Es übt der Strahlungsdruck keine tangentiellen Kräfte auf die vollkommen spiegelnde Fläche aus.

Die Formel (204b) ist insofern bemerkenswert, als in derselben die Bewegung des Spiegels explizite nicht auftritt. Für einen ruhenden Spiegel erhält man jene Formel, indem man den Faradayschen Längszug der zur leitenden Fläche normalen elektrischen Kraftlinien und den Querdruck der tangentiellen magnetischen Kraftlinien (Bd. I, § 97) zusammenfügt. Für einen bewegten Spiegel ist diese Deutung nicht zulässig; hier tritt $\mathfrak{T}'$ an Stelle von $\mathfrak{T}$, auch ist nicht $\mathfrak{E}$, sondern $\mathfrak{E}'$ der Vektor, welcher die Kraft auf die Einheit der am Leiter haftenden Elektrizität anzeigt, und der daher senkrecht zur vollkommen leitenden Fläche gerichtet sein muß. Dennoch ist der formale Zusammenhang des Lichtdruckes mit den Feldstärken nach (204b) für den bewegten Spiegel der gleiche wie für den ruhenden. Natürlich sind die Werte der Feldstärken an der Spiegeloberfläche ihrerseits von der Bewegung des Spiegels abhängig.

Wir betrachten zunächst ebene Wellen, die senkrecht auf einen ruhenden ebenen Spiegel fallen. Die Spiegelebene werde als (yz)-Ebene gewählt. Die Feldstärken $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{H}_1$ der einfallenden Welle seien parallel der $(-y)$-Achse bzw. der z-Achse, diejenigen der reflektierten Welle $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{H}_2$ parallel der y-Achse bzw. der z-Achse. Da für diese ebenen Wellen

$$-\mathfrak{E}_{1y} = \mathfrak{H}_{1z}, \quad \mathfrak{E}_{2y} = \mathfrak{H}_{2z} \tag{205}$$

ist, und da an der spiegelnden Fläche die Grenzbedingung vorgeschrieben ist

$$\mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_{2y} = 0,$$

so folgt

$$\mathfrak{H}_z = \mathfrak{H}_{1z} + \mathfrak{H}_{2z} = 2\mathfrak{H}_{1z},$$

und daher

$$8\pi\mathfrak{T} = -\mathfrak{n}\mathfrak{H}_z^2 = -\mathfrak{n}\cdot 4\mathfrak{H}_{1z}^2.$$

Es findet sich demnach der normale Lichtdruck auf den ruhenden Spiegel bei senkrechter Inzidenz des Lichtes

$$p = \frac{1}{2\pi}\mathfrak{H}_{1z}^2 = \frac{1}{4\pi}\left\{\mathfrak{E}_{1y}^2 + \mathfrak{H}_{1z}^2\right\} \tag{206}$$

gleich der doppelten Energiedichte der einfallenden Welle.

Wir gehen jetzt zum bewegten Spiegel über; die Bewegung erfolgt parallel der äußeren Normalen $\mathfrak{n}$, die jetzt mit der x-Achse zusammenfällt, d. h. entgegen den einfallenden Wellen. Die Beziehungen (205) gelten auch jetzt noch, aber die Grenzbedingung ist eine andere; es soll die tangentielle Komponente des durch (203) definierten Vektors $\mathfrak{E}'$ verschwinden. Setzen wir $\frac{\mathfrak{w}_x}{c} = \beta$, so folgt aus

$$0 = \mathfrak{E}_y' = \mathfrak{E}_y - \beta\mathfrak{H}_z = \mathfrak{E}_{1y} - \beta\mathfrak{H}_{1z} + \mathfrak{E}_{2y} - \beta\mathfrak{H}_{2z}$$

mit Rücksicht auf (205)

$$\mathfrak{H}_{2z} = \mathfrak{H}_{1z}\frac{1+\beta}{1-\beta}; \tag{207}$$

ferner wird (204b)

$$8\pi\mathfrak{T}' = -\mathfrak{n}\mathfrak{H}_z^2(1-\beta^2). \tag{207a}$$

Da nun, gemäß (207), gilt

$$\mathfrak{H}_z = \mathfrak{H}_{1z} + \mathfrak{H}_{2z} = \mathfrak{H}_{1z}\frac{2}{1-\beta},$$

so folgt

$$8\pi\mathfrak{T}' = -\mathfrak{n}\cdot 4\mathfrak{H}_{1z}^2\frac{1+\beta}{1-\beta}. \tag{207b}$$

Der Druck des senkrecht einfallenden Lichtes auf den ihm entgegen bewegten Spiegel wird hiernach

$$p' = \frac{1}{2\pi}\mathfrak{H}_{1z}^2\frac{1+\beta}{1-\beta} = p\cdot\frac{1+\beta}{1-\beta}. \tag{208}$$

Er wird durch die Bewegung des Spiegels im Verhältnis $1 + \beta : 1 - \beta$ gesteigert und wird unendlich, wenn der Spiegel sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt. Eine Bewegung des Spiegels mit Lichtgeschwindigkeit der auffallenden Strahlung entgegen erfordert unendliche Arbeitsleistung und ist daher physikalisch nicht realisierbar.

Die Arbeitsleistung gegen den Druck der Strahlung bringt eine Steigerung der Amplituden des reflektierten Lichtes mit sich, welche durch (207) gegeben ist. Man überzeugt sich unschwer davon, daß die erhaltenen Ergebnisse mit dem Energiesatze und dem Impulssatze in Übereinstimmung sind. Wir wollen indessen hierauf an dieser Stelle nicht eingehen. Weiter unten (§ 42) werden wir das Problem der Lichtreflexion durch einen bewegten Spiegel für den allgemeineren Fall schiefer Inzidenz behandeln, und gerade die Impulsgleichungen und die Energiegleichung werden dort an die Spitze gestellt werden.

§ 41. Der relative Strahl.

In der elementaren Theorie der Aberration bestimmt man die Richtung des relativen Strahles bekanntlich folgendermaßen. Man denkt sich den Strahl durch eine Öffnung O tretend, und, nach Durchlaufung der Strecke OP, im Aufpunkte P eintreffend. Der in P befindliche Beobachter und der Schirm, dessen Öffnung O ist, mögen die gemeinsame konstante Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ besitzen. Dann ist die Öffnung zu der Zeit, wo das Licht in P eintrifft, bereits nach O' gelangt (vgl. Abb. 5), und der Beobachter, der von der Bewegung keine Kenntnis besitzt, wird $O'P$ als Strahlrichtung bezeichnen. Die Richtung des relativen Strahles ist hiernach diejenige des Vektors

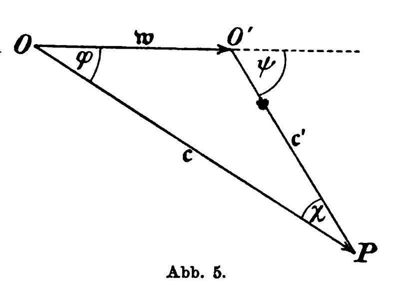


Abb. 5.

$$\mathfrak{c}' = \mathfrak{c} - \mathfrak{w}, \tag{209}$$

der die Relativgeschwindigkeit von Licht und Beobachter darstellt. Schon Bradley erklärte durch diese vom Standpunkte der Emissionstheorie des Lichtes ohne weiteres einleuchtende Konstruktion die Aberration des Fixsternlichtes infolge der Umlaufsbewegung der Erde; der diese Umlaufsbewegung darstellende periodische Teil der Erdgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ gibt zu einem periodischen Wechsel der Richtung des relativen Strahles und damit zu einer jährlichen Periode der scheinbaren Örter der Fixsterne Veranlassung.

Zunächst wollen wir einige Beziehungen ableiten, die sich aus dem Dreieck der Vektoren $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{c}'$ ohne weiteres ergeben. Der Betrag von $\mathfrak{c}'$ ist

$$c' = c\sqrt{1 + \beta^2 - 2\beta\cos\varphi}, \quad \beta = \frac{|\mathfrak{w}|}{c}. \tag{209a}$$

Auch hat man

$$\frac{c'}{c} = \cos\chi - \beta\cos\psi, \tag{209b}$$

$$\frac{c'\cos\chi}{c} = 1 - \beta\cos\varphi. \tag{209c}$$

Ist ω der räumliche Öffnungswinkel eines in P sich vereinigenden Strahlenbündels, so entspricht ihm im relativen Strahlengange der Öffnungswinkel ω', der sich folgendermaßen bestimmt

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{d\cos\varphi}{d\cos\psi} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\cdot\frac{d\varphi}{d\psi}. \tag{210}$$

Das leuchtet sofort ein, wenn man P als Anfangspunkt eines Systemes von Polarkoordinaten betrachtet, dessen Achse durch die Richtung von $\mathfrak{w}$ gegeben ist. Der Strahlenkegel der relativen Strahlen liegt dann zwischen denselben Meridianebenen wie derjenige der absoluten Strahlen; er erscheint nur zwischen zwei andere Breitenkreise verlegt.

Aus dem Dreieck der Abb. 5 folgt nun

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{c'}{c}, \quad \varphi = \psi - \chi,$$

folglich

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{c'}{c}\left(1 - \frac{d\chi}{d\psi}\right).$$

Da ferner

$$\frac{\sin\chi}{\sin\psi} = \frac{|\mathfrak{w}|}{c} = \beta$$

hier als Konstante zu betrachten ist, so gilt nach (209b)

$$1 - \frac{d\chi}{d\psi} = 1 - \beta\frac{\cos\psi}{\cos\chi} = \frac{c'}{c\cos\chi},$$

und folglich

(210a)
$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{c'^2}{c^2\cos\chi}.$$

Der Begriff „Strahl" ist nicht nur ein geometrischer, sondern auch ein physikalischer; der Betrag des Strahlvektors oder die „Strahlung" wird gemessen durch die auf Zeiteinheit und Flächeneinheit bezogene Wärmeentwickelung in einer senkrecht zur Strahlrichtung gestellten schwarzen Fläche. Wir haben in diesem Werke bisher nur von der „absoluten Strahlung" S gesprochen, die durch eine ruhende, senkrecht zu $\mathfrak{S}$ (oder $\mathfrak{c}$) gestellte schwarze Fläche definiert ist. Es bestimmt (vgl. § 5) $\frac{\mathfrak{S}}{c}$ gleichzeitig die in der Sekunde auf den Quadratzentimeter fallende Bewegungsgröße des Lichtes oder die Kraft des Lichtdruckes auf die schwarze Fläche. Der absoluten Strahlung stellen wir jetzt die „relative Strahlung" S' gegenüber; diese wird gemessen durch die Wärmeentwickelung, welche in der Sekunde im Quadratzentimeter einer zur relativen Strahlrichtung (d. h. zu $\mathfrak{c}'$) senkrechten bewegten schwarzen Fläche stattfindet. Sie berechnet sich folgendermaßen:

Die Energiemenge, die in der Sekunde durch die Flächeneinheit einer im Raume zu $\mathfrak{c}'$ senkrechten, bewegten (gedachten) Fläche hindurchtritt, ist $S \cdot \frac{c'}{c}$; wir können diese auch (vgl. § 14) als „relativen Energiestrom" bezeichnen. Um die Wärmeentwickelung in der schwarzen Fläche zu bestimmen, haben wir noch die Arbeitsleistung des Lichtdruckes zu subtrahieren. Die in der Sekunde auf die Flächeneinheit auffallende Bewegungsgröße ist $\frac{\mathfrak{S}}{c} \cdot \frac{c'}{c}$, ihre Richtung ist diejenige

des absoluten Strahles; sie gibt die Druckkraft der Strahlung auf die schwarze Fläche an. Folglich ist die *Arbeitsleistung des Strahlungsdruckes* $\frac{c'}{c^2}(\mathfrak{w}\mathfrak{S})$, und daher die *relative Strahlung*

$$S' = \frac{c'}{c} S - \frac{c'}{c^2}(\mathfrak{w}\mathfrak{S}) \cdot \tag{211}$$

Da es sich hier um ebene Wellen handelt, bei denen $\mathfrak{S}$ parallel zu $\mathfrak{c}$ ist, so wird mit Rücksicht auf (209)

$$S' = \frac{c'}{c^2}(\mathfrak{c}'\mathfrak{S}) = S\frac{c'^2}{c^2}\cos\chi. \tag{211a}$$

Auf Grund von (210a) können wir auch schreiben

$$\frac{S'}{c'^4\omega'} = \frac{S}{c^4\omega} \cdot \tag{211b}$$

Verstehen wir jetzt unter dem „*relativen Strahle*" einen Vektor $\mathfrak{S}'$, dessen Richtung diejenige von $\mathfrak{c}'$ und dessen Betrag die relative Strahlung S' ist, so erhalten wir aus (211a) ohne weiteres den *für ebene Wellen gültigen Ausdruck von* $\mathfrak{S}'$

$$\mathfrak{S}' = \frac{\mathfrak{c}'}{c^2}(\mathfrak{c}'\mathfrak{S}). \tag{211c}$$

Wir wollen dieser synthetischen Ableitung des relativen Strahles eine analytische gegenüberstellen, indem wir von dem allgemein gültigen Ausdruck von $\mathfrak{S}'$ durch die elektromagnetischen Vektoren ausgehen. Für ebene Wellen gelangen wir auf diesem Wege zur elektromagnetischen Begründung der obigen Konstruktion der relativen Strahlrichtung.

Der absolute Strahl wird bestimmt durch den Poyntingschen Vektor

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]; \tag{212}$$

derselbe gibt den Energiestrom durch eine ruhende Fläche an. Der *relative Energiestrom* nach einer durch n gekennzeichneten Richtung ist

$$\mathfrak{S}_n - \mathfrak{w}_n \frac{1}{8\pi}\{\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\}, \tag{212a}$$

er stellt die Energiemenge dar, welche in der Sekunde durch den Quadratzentimenter einer bewegten, senkrecht zu n gestellten (gedachten) Fläche im Raume hindurchtritt (vgl. § 14, Gleichung 76b).

Die auf die Flächeneinheit berechnete Kraft des Strahlungsdruckes ist durch (201a) gegeben. Handelt es sich um die relative Strahlung auf bewegte schwarze oder blanke Flächen, so ist die Arbeitsleistung der Flächenkraft $\mathfrak{T}'$ von (212a) zu subtrahieren. Da $\mathfrak{n}$ jetzt nicht wie im vorigen Paragraphen der von der Fläche fortweisenden, sondern der nach ihr hinweisenden Normale parallel ist, so ist die Arbeitsleistung des Strahlungsdruckes an der bewegten Fläche zu schreiben

$$(212\text{b}) \qquad (\mathfrak{w}\mathfrak{T}') = -\frac{1}{8\pi}\Big\{2\mathfrak{E}_n(\mathfrak{w}\mathfrak{E}) + 2\mathfrak{H}_n(\mathfrak{w}\mathfrak{H}) - \mathfrak{w}_n(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) + \frac{2\mathfrak{w}_n}{c}(\mathfrak{w}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}])\Big\}.$$

Die Differenz von (212a) und (212b) ist es, die sich als Wärmeentwickelung in einer senkrecht zu n gestellten, bewegten schwarzen Fläche kundgibt. Wir verstehen unter der „relativen Strahlung" parallel der durch n gekennzeichneten Richtung eben diese Differenz:

$$\mathfrak{S}_n + \frac{1}{4\pi}\Big\{\mathfrak{E}_n(\mathfrak{w}\mathfrak{E}) + \mathfrak{H}_n(\mathfrak{w}\mathfrak{H}) - \mathfrak{w}_n(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) + \frac{\mathfrak{w}_n}{c}(\mathfrak{w}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}])\Big\}.$$

Wir können hiernach die relative Strahlung nach irgendeiner Richtung auffassen als Komponente des Vektors

$$(213) \qquad \mathfrak{S}' = \mathfrak{S} + \frac{1}{4\pi}\Big\{\mathfrak{E}(\mathfrak{w}\mathfrak{E}) + \mathfrak{H}(\mathfrak{w}\mathfrak{H}) - \mathfrak{w}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) + \frac{\mathfrak{w}}{c}(\mathfrak{w}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}])\Big\}.$$

Dieser Vektor ist der relative Strahl.

Wir wollen an Stelle der Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ die durch (203) definierten Vektoren $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ einführen; wir berechnen deren äußeres Produkt

$$(213\text{a})\quad [\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'] = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] - \frac{1}{c}\Big[\mathfrak{E}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{E}]\Big] - \frac{1}{c}\Big[\mathfrak{H}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{H}]\Big] + \frac{1}{c^2}\Big[[\mathfrak{w}\,\mathfrak{E}],[\mathfrak{w}\,\mathfrak{H}]\Big].$$

Nach Regel (δ) und (γ) der Formelzusammenstellung in Bd. I, S. 452 ist:

$$\Big[\mathfrak{E}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{E}]\Big] = \mathfrak{w}\,\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{E}\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{E})$$

$$\Big[\mathfrak{H}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{H}]\Big] = \mathfrak{w}\,\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{H}\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{H})$$

$$\Big[[\mathfrak{w}\,\mathfrak{E}],[\mathfrak{w}\,\mathfrak{H}]\Big] = \mathfrak{w}\Big([\mathfrak{w}\,\mathfrak{E}]\,\mathfrak{H}\Big) - \mathfrak{H}\Big([\mathfrak{w}\,\mathfrak{E}]\,\mathfrak{w}\Big) = \mathfrak{w}\Big(\mathfrak{w}\,[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]\Big).$$

Demnach ergibt sich, wenn man (213a) mit $\frac{c}{4\pi}$ multipliziert, ein Vektor, der mit (213) identisch ist. Es ist also der allgemeine Ausdruck des relativen Strahles durch die elektromagnetischen Vektoren

$$(213\text{b})\qquad \mathfrak{S}' = \frac{c}{4\pi}\,[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'].$$

Die Komponente dieses Vektors nach irgendeiner Richtung ergibt die Wärmeentwickelung in einer senkrecht zu dieser Richtung gestellten, mit beliebiger Geschwindigkeit bewegten schwarzen Fläche an. Die Normale derjenigen Stellung der schwarzen Fläche, welche maximaler Wärmeentwickelung entspricht, ist der physikalischen Definition des Strahles gemäß die relative Strahlrichtung.

Wir haben den Nachweis zu erbringen, daß für ebene Wellen die zu Beginn dieses Paragraphen gegebene elementare Ableitung des relativen Strahles aus (213b) hervorgeht.

Für eine ebene, geradlinig polarisierte Welle bilden Geschwindigkeit $\mathfrak{c}$, elektrische und magnetische Feldstärke ein Tripel aufeinander senkrechter Richtungen. Man hat, da die Beträge der beiden Feldstärken einander gleich sind,

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{E}],\quad \mathfrak{E} = \frac{1}{c}\,[\mathfrak{H}\,\mathfrak{c}].$$

Aus (203) und (209) folgt

$$\mathfrak{E}' = \frac{1}{c}[\mathfrak{H}\mathfrak{c}'], \quad \mathfrak{H}' = \frac{1}{c}[\mathfrak{c}'\mathfrak{E}].$$

Demnach wird der relative Strahl

$$\mathfrak{S}' = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{1}{c^2}\Big[[\mathfrak{H}\mathfrak{c}'], [\mathfrak{c}'\mathfrak{E}]\Big],$$

was nach Regel (δ) und (γ) in Bd. I, S. 452 übergeht in

$$\mathfrak{S}' = \frac{c}{4\pi}\frac{\mathfrak{c}'}{c^2}\Big([\mathfrak{H}\mathfrak{c}']\,\mathfrak{E}\Big) = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{\mathfrak{c}'}{c^2}\Big(\mathfrak{c}'[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]\Big)$$

oder

(213c) $$\mathfrak{S}' = \frac{\mathfrak{c}'}{c^2}(\mathfrak{c}'\mathfrak{S}).$$

Damit sind wir, von der elektromagnetischen Definition (213b) des relativen Strahles ausgehend, für ebene Wellen zu (211c) zurückgelangt. Wir sehen, daß $\mathfrak{S}'$ parallel der Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{c}'$ des Lichtes gegen die auffangende Fläche ist, daß mithin die elementare Konstruktion der relativen Strahlrichtung auch vom Standpunkte der auf den elektromagnetischen Feldgleichungen des § 38 fußenden Theorie gerechtfertigt ist. Gleichzeitig erhalten wir den Ausdruck (211a) bzw. (211) für die relative Strahlung ebener Wellen wieder.

Die Konstruktion des relativen Strahlenganges beruht wesentlich auf der Voraussetzung, daß die Lichtfortpflanzung im Raume durch die Bewegung der Körper nicht beeinflußt wird. Die von dieser Konstruktion ausgehende Aberrationstheorie fußt demnach auf der Annahme „ruhenden Äthers". Die Annahme, daß der Äther sich nicht mit der Erde bei ihrem Umlauf um die Sonne mitbewegt, war es, die Fresnel der Aberrationstheorie zugrunde legte. Im Gegensatze hierzu nahm Stokes an, daß der Äther von der Erde mitgeführt wird; hier werden die Gesetze der Aberration des Fixsternlichtes nur durch äußerst komplizierte und willkürliche Hypothesen über die Bewegung des Äthers in der Umgebung der Erde gewonnen. Von den elektromagnetischen Theorien entspricht die Hertz-

sche der Stokesschen, die Lorentzsche der Fresnelschen. Die Erklärung der Aberration vom Standpunkte der Hertzschen Elektrodynamik bewegter Körper aus begegnet ähnlichen Schwierigkeiten wie die Stokessche auf der elastischen Lichttheorie fußende Erklärung. Vom Lorentzschen Standpunkte aus erklärt sich die Aberration ganz ungezwungen; es ist eben die Bewegung der Erde gegen ein durch die Isotropie der Lichtfortpflanzung gekennzeichnetes Bezugssystem, welche die jährliche Periode der relativen Strahlrichtungen bedingt. Andererseits gibt die Hertzsche Theorie ohne weiteres von der Tatsache Rechenschaft, daß die elektromagnetischen und optischen Vorgänge, welche sich ausschließlich an der Erdoberfläche abspielen, genau so verlaufen wie in einem ruhenden Systeme. Die Grundvorstellungen der Elektronentheorie hingegen legen die Vermutung nahe, daß die Umlaufsbewegung der Erde auch diese Erscheinungen beeinflußt, und daß es möglich sein sollte, durch elektrodynamische oder optische Versuche im Laboratorium die jeweilige Richtung der Erdbewegung festzustellen. Daß dies nicht der Fall ist, beruht nach H. A. Lorentz auf einer merkwürdigen Kompensation der Wirkungen; wir kommen später darauf zurück.

§ 42. Die Reflexion des Lichtes durch einen bewegten Spiegel.

Wir behandeln in diesem Paragraphen das Problem der Reflexion des Lichtes durch einen in gleichförmiger Translationsbewegung begriffenen, vollkommen blanken Spiegel[2]). Wir könnten dabei in ähnlicher Weise vorgehen, wie es im § 40 für den Fall senkrechter Inzidenz geschah, wo neben den Gesetzen der Lichtfortpflanzung im Raume die an der spiegelnden Fläche vorgeschriebene Grenzbedingung herangezogen wurde. Wir ziehen es indessen vor, die allgemeinen Impulssätze und den Energiesatz zugrunde zu legen. Auf diese Weise treten die Voraussetzungen, auf denen die gegebene Lösung beruht, deutlicher hervor: Es ist erstens die Grundhypothese der Elektronentheorie, daß die Lichtfortpflanzung

im Raume durch die Bewegung der Körper (hier des Spiegels) nicht beeinflußt wird. Zweitens die Annahme einer Bewegungsgröße der Lichtwellen, welche der Richtung nach durch den absoluten Strahl bestimmt, dem Betrage nach dem Quotienten aus der Energie und der Geschwindigkeit des Lichtes gleich ist; diese Annahme kommt schon bei der Ableitung des Lichtdruckes auf ruhende Flächen ins Spiel. Drittens endlich die Eigenschaft des idealen Spiegels, die in § 40 abgeleitet wurde, keiner scheerenden Druckkraft des Lichtes ausgesetzt zu sein. Diese dritte Voraussetzung kann, wie sich zeigen wird, auch durch das Huyghenssche Prinzip ersetzt werden.

Wir legen die (yz)-Ebene in die Spiegelebene, die x-Achse weise nach außen. Es bezeichnen $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ die durch c geteilten Komponenten der Translationsgeschwindigkeit des Spiegels. Es seien $-\alpha_1$ und $+\alpha_2$ die Kosinus der Winkel, welche die absoluten Strahlrichtungen der einfallenden und der reflektierten Welle mit der x-Achse einschließen. Das Licht sei monochromatisch, und es seien ν_1 bzw. ν_2 die Schwingungszahlen der einfallenden und reflektierten Wellen an einem im Raume festen Punkte; ν' hingegen sei die Schwingungszahl an einem Punkte des bewegten Spiegels. Dem Dopplerschen Prinzip (§ 14) zufolge sind die Schwingungszahlen ν und ν' der an einem festen und einem bewegten Punkte gezählten Lichtwellen durch die allgemeine Beziehung verknüpft

$$\frac{\nu'}{\nu} = 1 - \beta \cos \varphi. \tag{214}$$

Dabei ist φ der Winkel des absoluten Strahls gegen die Bewegungsrichtung. Diese Formulierung des Dopplerschen Prinzips gilt sowohl dann, wenn der Beobachter sich bewegt, als auch wenn die Lichtquelle sich bewegt, falls unter ν jedesmal die Schwingungszahl an einem absolut ruhenden Punkte verstanden wird. Aus (214) folgt nun ohne weiteres

$$\frac{\nu'}{\nu_1} = 1 - \beta \cos \varphi_1, \quad \frac{\nu'}{\nu_2} = 1 - \beta \cos \varphi_2 \tag{214a}$$

und daher bestimmt sich die Schwingungszahl des reflektierten Lichtes folgendermaßen:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{1 - \beta \cos \varphi_1}{1 - \beta \cos \varphi_2}. \tag{214b}$$

Es sind S_1 und S_2 die absoluten Strahlungen des einfallenden und des reflektierten Lichtes, d. h. die Energiemengen, die in der Sekunde durch die Flächeneinheit ruhender, zur absoluten Strahlrichtung senkrechter Flächen treten. Für schief gestellte und bewegte Flächen ist die durch die Flächeneinheit tretende Energiemenge der zur Fläche normalen Komponente der Relativgeschwindigkeit proportional. Die Normalkomponenten der Relativgeschwindigkeit sind für die einfallenden bzw. reflektierten Wellen in der gewählten Bezeichnung

$$c(\alpha_1 + \beta_x) \text{ bzw. } c(\alpha_2 - \beta_x).$$

Demnach sind die auf den Spiegel fallenden bzw. von ihm ausgesandten Energiemengen, berechnet auf Flächeneinheit und Zeiteinheit:

$$S_1(\alpha_1 + \beta_x) \text{ bzw. } S_2(\alpha_2 - \beta_x)$$

und die Vektoren der auffallenden bzw. entsandten Bewegungsgröße:

$$\frac{\mathfrak{S}_1}{c}(\alpha_1 + \beta_x) \text{ bzw. } \frac{\mathfrak{S}_2}{c}(\alpha_2 - \beta_x).$$

Die am Spiegel angreifende Flächenkraft des Strahlungsdruckes ist gleich der vektoriellen Differenz der in der Sekunde einfallenden und reflektierten Bewegungsgröße

$$\mathfrak{T}' = \frac{\mathfrak{S}_1}{c}(\alpha_1 + \beta_x) - \frac{\mathfrak{S}_2}{c}(\alpha_2 - \beta_x). \tag{215}$$

Da eine Wärmeentwicklung nach der Definition des vollkommenen Spiegels ausgeschlossen ist, so kann Energie an den Spiegel nur in Form von Arbeitsleistung des Strahlungsdruckes abgegeben werden. Man erhält demnach

$$(\mathfrak{w}\mathfrak{T}') = S_1(\alpha_1 + \beta_x) - S_2(\alpha_2 - \beta_x). \tag{215a}$$

Nach (215) ist aber

$$(\mathfrak{w}\mathfrak{T}') = S_1 \beta \cos \varphi_1 (\alpha_1 + \beta_x) - S_2 \beta \cos \varphi_2 (\alpha_2 - \beta_x).$$

Man erhält also

(215b) $$S_1(\alpha_1 + \beta_x)(1 - \beta\cos\varphi_1) = S_2(\alpha_2 - \beta_x)(1 - \beta\cos\varphi_2).$$

Es treten hier wieder die auch in den Ausdruck des Dopplerschen Prinzips (214b) eingehenden Größen auf, deren Bedeutung uns bekannt ist. Es sind

$$c(1 - \beta\cos\varphi_1) \quad \text{bzw.} \quad c(1 - \beta\cos\varphi_2)$$

die Geschwindigkeiten, mit denen ein Punkt des bewegten Spiegels sich senkrecht gegen die Lichtwellen bewegt, oder anders ausgedrückt, die Geschwindigkeiten, mit denen die Lichtwellen über einen im Spiegel festen Punkt fortstreichen. Es sind ferner

$$\sqrt{1 - \alpha_1^2} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{1 - \alpha_2^2}$$

die Sinus der Winkel, welche die absoluten Strahlrichtungen mit der Spiegelnormalen einschließen. Demnach sind die Geschwindigkeiten, mit denen die Schnittgeraden der Wellenebenen längs der spiegelnden Ebene forteilen:

$$\frac{c(1 - \beta\cos\varphi_1)}{\sqrt{1 - \alpha_1^2}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{c(1 - \beta\cos\varphi_2)}{\sqrt{1 - \alpha_2^2}}.$$

Das Huyghenssche Prinzip verlangt nun, daß diese beiden Geschwindigkeiten, mit denen die Spuren der einfallenden und der gespiegelten Wellen längs der Spiegelebene forteilen, einander gleich seien. Es bestimmt die Richtung des reflektierten Strahles aus dieser Forderung:

(216) $$\frac{1 - \beta\cos\varphi_1}{\sqrt{1 - \alpha_1^2}} = \frac{1 - \beta\cos\varphi_2}{\sqrt{1 - \alpha_2^2}};$$

es verlangt ferner, daß der reflektierte absolute Strahl in der Einfallsebene liegt.

Aus der Beziehung (216) und der aus der Energiegleichung und der Impulsgleichung gewonnenen (215b) folgt nun:

(216a) $$0 = S_1(\alpha_1 + \beta_x)\sqrt{1 - \alpha_1^2} - S_2(\alpha_2 - \beta_x)\sqrt{1 - \alpha_2^2}.$$

Hier steht rechts nichts anderes als die mit c multiplizierte, in die Spiegelebene fallende Komponente der Flächen-

kraft $\mathfrak{T}'$ des Strahlungsdruckes (vgl. 215). Wir haben damit aus dem Huyghensschen Prinzip abgeleitet, daß der Strahlungsdruck senkrecht zur Ebene des idealen Spiegels wirkt.

Wir hätten umgekehrt auch von der Forderung ausgehen können, daß der Strahlungsdruck keine scheerende Komponente besitzt; wir hatten dies ja im § 40 aus den Grenzbedingungen der Elektrodynamik bewegter Körper abgeleitet. Da alsdann die tangentiellen Komponenten der auffallenden und reflektierten Bewegungsgröße einander gleich sein müssen, so folgt ohne weiteres, daß der gespiegelte absolute Strahl in einer Ebene mit dem einfallenden Strahl und der Spiegelnormale liegt, und daß die Differenz (216a) der in die Spiegelebene fallenden Komponenten der auffallenden bzw. entsandten Bewegungsgröße gleich Null ist; hieraus und aus (215b) folgt alsdann die Beziehung (216), welche das Huyghenssche Prinzip formuliert. Wir sehen also: Das Huyghenssche Prinzip und die Forderung, daß die Kraft des Strahlungsdruckes auf die Spiegelebene keine tangentielle Komponente besitzt, sind einander vollkommen äquivalent.

Es sind

$$1 - \beta \cos\varphi_1 = 1 + \beta_x \alpha_1 \pm \sqrt{1 - \alpha_1^2} \cdot \sqrt{\beta_y^2 + \beta_z^2},$$

$$1 - \beta \cos\varphi_2 = 1 - \beta_x \alpha_1 \pm \sqrt{1 - \alpha_2^2} \cdot \sqrt{\beta_y^2 + \beta_z^2}.$$

Hieraus und aus (216) folgt

$$\text{(216b)} \qquad \frac{1 + \beta_x \alpha_1}{\sqrt{1 - \alpha_1^2}} = \frac{1 - \beta_x \alpha_2}{\sqrt{1 - \alpha_2^2}}.$$

Man sieht, daß die Richtung des reflektierten Strahles nur von der normalen Komponente der Spiegelgeschwindigkeit abhängt. Bewegt sich der Spiegel in seiner Ebene, so erfolgt die Reflexion des Lichtes genau so wie am ruhenden Spiegel.

Mit Rücksicht auf (216) und (216b) können wir jetzt die Formel (214b), welche das Dopplersche Prinzip enthält, folgendermaßen schreiben:

$$\text{(217)} \qquad \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{1 + \beta_x \alpha_1}{1 - \beta_x \alpha_2}.$$

Auch die Schwingungszahl des reflektierten Lichtes hängt nur von der normalen Komponente der Spiegelgeschwindigkeit ab.

Was den normalen Lichtdruck anbelangt, so folgt aus (215)

$$p' = -\mathfrak{T}'_x = \frac{1}{c}\left\{S_1\alpha_1(\alpha_1+\beta_x) + S_2\alpha_2(\alpha_2-\beta_x)\right\}. \tag{218}$$

Er ist bestimmt, wenn man die Richtung und den Betrag der reflektierten Strahlung kennt. Letzterer aber bestimmt sich aus dem Dopplerschen Prinzip (214b) und der durch Vereinigung der Energiegleichung und Impulsgleichung gewonnenen Beziehung (215b) folgendermaßen:

$$\frac{S_1(\alpha_1+\beta_x)}{\nu_1} = \frac{S_2(\alpha_2-\beta_x)}{\nu_2} \tag{219}$$

Die in der Sekunde auf den Spiegel fallenden und die von ihm im reflektierten Lichte entsandten Energiemengen verhalten sich wie die entsprechenden Schwingungszahlen.

Wie aus (216b) folgt, liegen die Kosinus α_1, α_2 der Wellennormalen gegen die Spielnormale in den einander zugeordneten Intervallen

$$-\beta_x \leqq \alpha_1 \leqq 1, \quad +\beta_x \leqq \alpha_2 \leqq 1.$$

Die Grenzen entsprechen dem im relativen Strahlengange streifenden, bzw. dem senkrecht einfallenden und reflektierten Strahle. Sieht man von dem ersteren Grenzfalle, wo nach (218) der Strahlungsdruck Null ist, ab, so gilt

$$\alpha_1 + \alpha_2 > 0.$$

Infolgedessen gestattet es die Identität

$$(1+\beta_x\alpha_1)^2(1-\alpha_2^2) - (1-\beta_x\alpha_2)^2(1-\alpha_1^2)$$
$$= (\alpha_1+\alpha_2)\{2\beta_x - 2\beta_x\alpha_1\alpha_2 + (1+\beta_x^2)(\alpha_1-\alpha_2)\},$$

aus (216b) die Gleichung abzuleiten

$$2\beta_x - 2\beta_x\alpha_1\alpha_2 + (1+\beta_x^2)(\alpha_1-\alpha_2) = 0. \tag{220}$$

Aus dieser Beziehung ergeben sich zwei neue Formeln, die beide zur Bestimmung des Reflexionswinkels dienen können:

$$\frac{2}{1-\beta_x^2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\beta_x} + \frac{\alpha_2}{\alpha_2-\beta_x}, \tag{220a}$$

$$\frac{1+\beta_x\alpha_1}{\alpha_1+\beta_x} = \frac{1-\beta_x\alpha_2}{\alpha_2-\beta_x}, \tag{220b}$$

Aus der letzten Gleichung, im Verein mit (216b), folgt:

$$\frac{\alpha_1+\beta_x}{\sqrt{1-\alpha_1^2}} = \frac{\alpha_2-\beta_x}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}. \tag{220c}$$

Diese Beziehung führt zu einer sehr einfachen Konstruktion der Richtung des reflektierten Strahles, falls der Spiegel sich senkrecht zu seiner Ebene bewegt. Alsdann sind Zähler und Nenner in (220c) nichts anderes als die durch c geteilten Komponenten der Relativgeschwindigkeit des einfallenden bzw. des reflektierten Lichtes gegen den Spiegel. Bewegt sich der Spiegel senkrecht zu seiner Ebene, so gilt das Reflexionsgesetz: Im relativen Strahlengange ist der Reflexionswinkel dem Einfallswinkel gleich. Im allgemeinen Falle gilt dieses Gesetz für den relativen Strahlengang, den ein nur an der Bewegung des Spiegels senkrecht zu seiner Ebene teilnehmender Beobachter wahrnimmt.

Aus der absoluten Geschwindigkeit $\mathfrak{c}_1$ des einfallenden Lichtes bestimmt sich die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{c}_1'$ gegen den bewegten Spiegel nach der Konstruktion des vorigen Paragraphen. Aus derselben Konstruktion (Abb. 5) kann man, wenn die Richtung der Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{c}_2'$ des reflektierten Strahles gegen den Spiegel bekannt ist, die absolute Geschwindigkeit $\mathfrak{c}_2$ desselben finden, deren Betrag c ja ein für allemal gegeben ist. Bewegt sich der Spiegel senkrecht zu seiner Ebene, so schließen, wie wir fanden, die Vektoren $-\mathfrak{c}_1'$ und $\mathfrak{c}_2'$ den gleichen Winkel mit dem Vektor $\mathfrak{w}$ ein; man hat demnach

$$\psi_1 + \psi_2 = \pi.$$

Da ferner der Vektor $\mathfrak{w}$ beiden Dreiecken gemeinsam und die Längen der den Winkeln ψ_1 bzw. ψ_2 gegenüberliegenden Seiten gleich c sind, so findet sich $\chi_1 = \chi_2$, d. h. der Winkel, den der relative und absolute Strahl miteinander einschließen, ist der gleiche für das einfallende und das reflektierte Licht. Dabei ist, wenn die Bewegung des Spiegels in Richtung der äußeren Normalen erfolgt, der Einfallswinkel im relativen Strahlengange um χ_1 kleiner als im absoluten, und der Reflexionswinkel im absoluten Strahlengange um χ_2 kleiner als im relativen, so daß der Reflexionswinkel im absoluten Strahlengange um

$$\chi_1 + \chi_2 = 2\chi_1$$

kleiner ist als der Einfallswinkel. Erfolgt dagegen die Bewegung des Spiegels in entgegengesetztem Sinne, so ist im absoluten Strahlengange der Reflexionswinkel um $2\chi_1$ größer als der Einfallswinkel. Bewegt sich der Spiegel schief zu seiner Ebene, so kann man den reflektierten absoluten Strahl in derselben Weise bestimmen, indem man nur den zur Spiegelebene senkrechten Bestandteil von $\mathfrak{w}$ berücksichtigt. Dagegen der unter Berücksichtigung des gesamten $\mathfrak{w}$ bestimmte relative Strahlengang befolgt in diesem allgemeinen Falle keine einfach auszusprechende Regel; der Reflexionswinkel ist hier im allgemeinen nicht gleich dem Einfallswinkel. Nur im Falle einer Bewegung parallel der Spiegelebene liegt die Sache wieder sehr einfach; wie im absoluten, so ist auch im relativen Strahlengange in diesem Falle der Reflexionswinkel dem Einfallswinkel gleich.

Handelt es sich um ein einfallendes Lichtbündel, dessen Strahlenkegel im absoluten Strahlengange den körperlichen Winkel ω_1 einschließt, so bestimmt sich der Öffnungswinkel ω_2 des gespiegelten Strahlbündels am einfachsten aus (220a). Man findet

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = \left(\frac{\alpha_2 - \beta_x}{\alpha_1 + \beta_x}\right)^2,$$

was nach (220b) und (217) ergibt

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{-2}. \tag{221}$$

Die von einem absolut ruhenden Beobachter wahrgenommenen Öffnungswinkel des einfallenden und des gespiegelten Strahlbündels verhalten sich wie die reziproken Quadrate der beobachteten Schwingungszahlen.

Aus (219) folgt übrigens durch Einführung von (217) und (220b)

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2. \tag{222}$$

Die absoluten Strahlungen verhalten sich wie die Quadrate der Schwingungszahlen.

Infolge der genannten Relationen geht (218) über in

$$p' = \frac{S_1}{c}(\alpha_1 + \beta_x)^2 \left\{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_x} + \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \beta_x}\right\}$$

oder, gemäß (220a), in

$$p' = \frac{2 S_1 (\alpha_1 + \beta_x)^2}{c(1 - \beta_x^2)}. \tag{223}$$

Dies ist der Betrag des normalen Strahlungsdruckes bei schiefer Inzidenz des Lichtes. Bei senkrechter Inzidenz wird die Gleichung (208) des § 40 wieder erhalten. Auch bei schiefer Inzidenz wird der Strahlungsdruck unendlich für $\beta_x = 1$, d. h. wenn der Spiegel sich senkrecht zu seiner Ebene mit Lichtgeschwindigkeit bewegt. Fällt auf die Vorderseite des Spiegels eine noch so geringe Strahlung, so kann sich der Spiegel senkrecht zu seiner Ebene nicht mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Bemerkenswert ist der Gegensatz zum Falle des bewegten starren Elektrons, wo Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit keineswegs auszuschließen war.

§ 43. Die Temperatur der Strahlung.

Die strahlende Wärme ist für die Ökonomie des Weltalls von der größten Bedeutung; sind es doch die Sonnenstrahlen, die alle Bewegung und alles Leben auf der Erde unterhalten. Wenn anders die Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie

überhaupt eine allgemeine Gültigkeit besitzen, so müssen sie nicht nur auf die in dem materiellen Körper enthaltene, sondern auch auf die strahlende Wärme Anwendung finden. Daher hat schon R. Clausius bei der Begründung der Thermodynamik die thermischen Wirkungen der Strahlung in Betracht gezogen, und G. Kirchhoff ist bei seinen für die Strahlungstheorie grundlegenden Untersuchungen von der Gültigkeit des Carnot-Clausiusschen Prinzipes für die Licht- und Wärmestrahlung ausgegangen. Wir wollen in diesem Paragraphen einige Folgerungen entwickeln, welche sich aus der Anwendung der Thermodynamik auf die Wellenstrahlung ergeben.

Wir denken uns ein Bündel unpolarisierten Lichtes von dem kleinen Öffnungswinkel ω. Durch eine senkrecht zur Achse des Bündels gestellte Fläche messen wir die Strahlungsintensität S; bei Lichtstrahlen im engeren Sinne könnten wir die Lichtstärke photometrisch messen, wir denken uns hier jedoch stets die Strahlungsintensität bolometrisch, d. h. durch ihre thermische Wirkung gemessen. S ist bereits auf die Einheit der auffangenden Fläche berechnet; es erweist sich ferner als zweckmäßig, sie auf die Einheit des körperlichen Winkels zu beziehen und die Strahlung spektral zu zerlegen. Wir nennen

$$\frac{S}{\omega} = \int_0^\infty H d\nu \tag{224}$$

die „gesamte Helligkeit“ des Strahlbündels und H die Helligkeit der spektral zerlegten Strahlung oder die „Helligkeit“ schlechtweg. Beobachtet man ein monochromatisches Lichtbündel oder auch ein aus verschiedenfarbigem Lichte zusammengesetztes in verschiedenen Entfernungen von der entsendenden Fläche, so nimmt die Strahlungsintensität S umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung von der leuchtenden Fläche ab; in demselben Maße aber nimmt der körperliche Winkel ω ab, unter welchem die leuchtende Fläche gesehen wird. Die Helligkeit jeder Farbe und auch ihr über das ganze Spektrum erstrecktes Integral ändert sich bei der freien Fortpflanzung des Lichtes im Raume nicht.

Mit M. Planck[43]) werden wir den Vorgang der ungestörten Lichtfortpflanzung im Raume, da er sich durch passend gewählte Hohlspiegel oder Linsen rückgängig machen läßt, als umkehrbaren Vorgang im Sinne der Thermodynamik betrachten. Da bei einem umkehrbaren, ohne Arbeitsleistung verlaufenden Vorgange die Temperatur sich nicht ändert, so erscheint es sachgemäß, einer bestimmten Helligkeit monochromatischer Strahlung in eindeutiger Weise eine bestimmte Temperatur zuzuordnen. Es können hiernach zwei Lichtquellen, z. B. die Sonne und eine Öllampe, dieselbe Lichtstärke ergeben, während die „Helligkeiten", entsprechend den verschiedenen Öffnungswinkeln der Lichtbündel, ganz verschiedene sind. Der weit größeren Helligkeit des Sonnenlichtes entspricht eine weit höhere Temperatur. Dabei brauchen die Temperaturen der einzelnen im Lichtbündel vertretenen Farben im allgemeinen nicht die gleichen zu sein. Die Temperatur jeder einzelnen Farbe aber bleibt bei der freien Fortpflanzung des Lichtes konstant.

Es erscheint hiernach unzulässig, thermodynamische Betrachtungen auf streng ebene Wellen anzuwenden; denn für verschwindenden Öffnungswinkel ω wird bei endlicher Strahlungsintensität die Helligkeit nach (224) unendlich. In der Tat würde ja eine endliche Strahlung pro Flächeneinheit eine unendliche Gesamtemission der unendlich entfernten Lichtquelle voraussetzen, was wir ausschließen müssen. Es kann zwar der Öffnungswinkel ω sehr klein, aber niemals gleich Null angenommen werden. Ebensowenig ist es vom Standpunkte der Thermodynamik aus gestattet, von streng monochromatischem Lichte zu reden; denn eine endliche Strahlungsintensität in einem verschwindenden Intervalle von Schwingungszahlen würde unendliche Helligkeit H, d. h. unendliche Temperatur ergeben; unendliche Temperatur bedeutet aber in der Thermodynamik freie Verwandelbarkeit in Arbeit. Auf die Energie streng periodischer elektrischer Wellen ist demnach der zweite Hauptsatz der Thermodynamik, welcher die Verwandelbarkeit in Arbeit einschränkt, überhaupt nicht an-

zuwenden. Von den rein periodischen langen Wellen sind die kurzen, durch ihre leuchtende und wärmende Wirkung sich kundgebenden Wellen gerade dadurch unterschieden, daß sie nicht streng monochromatisch sind. Jede „natürliche“ Strahlung, z. B. diejenige einer Spektrallinie, erfüllt ein zwar kleines, aber doch von Null verschiedenes spektrales Intervall von Schwingungszahlen. Gerade die Anwesenheit einer großen Zahl von Partialwellen, welche in regelloser Weise miteinander interferieren, ist nach M. Planck diejenige Eigenschaft der „natürlichen Strahlung“, welche die Anwendung der Thermodynamik ermöglicht. Wenn wir im folgenden von „monochromatischem Lichte“ reden, so verstehen wir darunter stets solches, dessen Schwingungszahlen ein kleines, aber doch von Null verschiedenes Intervall $d\nu$ erfüllen.

Um nun den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik für die Ermittelung der Beziehung zwischen Helligkeit und Temperatur fruchtbar zu machen, müssen wir einen reversibeln, mit Arbeitsleistung verbundenen Vorgang angeben, bei welchem die Helligkeit der Strahlung verändert wird. Ein solcher Vorgang ist der im vorigen Paragraphen behandelte, nämlich die Reflexion eines Lichtbündels durch einen bewegten vollkommenen Spiegel; wir überzeugen uns unschwer davon, daß derselbe umkehrbar im Sinne der Thermodynamik ist.

Wir stellen zu diesem Zwecke zwei Vorgänge einander gegenüber. Bei dem ersten sei S_1 die absolute Strahlung, ω_1 der kleine Öffnungswinkel des einfallenden monochromatatischen Lichtbündels, $d\nu_1$ sei die Breite des Intervalles der Schwingungszahlen; α_1 sei der Kosinus des Winkels, welchen die Achse des Bündels mit der Spiegelnormale einschließt. Durch

$$S_1 = H_1 \omega_1 d\nu_1 \tag{224a}$$

ist sodann die Helligkeit H_1 des einfallenden Bündels definiert. Bei dem ersten der betrachteten Vorgänge soll nun β_x positiv sein, d. h. der Spiegel soll sich dem einfallenden Lichte entgegen bewegen. Dabei wird von äußeren Kräften gegen den Strahlungsdruck eine gewisse Arbeit geleistet. Aus (216b)

bestimmt sich der Kosinus α_2 des Reflexionswinkels; der Reflexionswinkel ist kleiner als der Einfallswinkel. Nach (217) wird die Schwingungszahl des Lichtes bei der Reflexion vergrößert und gemäß (222) die absolute Strahlung im Verhältnis des Quadrates der Schwingungszahlen verstärkt. Da nach (221) der Öffnungswinkel des Bündels im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Schwingungszahlen verringert wird, so ist

$$\frac{H_1 d\nu_1}{H_2 d\nu_2} = \frac{S_1}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_2}{S_2} = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^4. \tag{225}$$

Dabei ist, wie aus (217) hervorgeht, das Verhältnis $\nu_2 : \nu_1$ bei gegebener Bewegung des Spiegels ein konstantes, so daß man hat

$$\frac{d\nu_2}{d\nu_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1}.$$

Demgemäß wird

$$\frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^3. \tag{226}$$

Die Helligkeiten der beiden Bündel verhalten sich wie die dritten Potenzen der Schwingungszahlen.

Dem soeben betrachteten Vorgange, bei dem α_2 der Kosinus des Reflexionswinkels war, stellen wir jetzt einen zweiten Vorgang gegenüber; hier soll der Einfallswinkel denjenigen Wert besitzen, den vorher der Reflexionswinkel besaß. Wie der Wert von α_2, so sollen jetzt auch die Werte von ν_2, S_2, H_2 und ω_2, die bei dem ersten Vorgange dem reflektierten Bündel zukamen, jetzt dem einfallenden Bündel zugeschrieben werden. Gleichzeitig soll die Bewegung des Spiegels in entgegengesetzter Richtung vor sich gehen, derart, daß β_x einen dem Betrage nach gleichen, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzten Wert annimmt. Setzen wir dementsprechend $-\beta_x$ an Stelle von β_x und den Index 2 an Stelle des Index 1, so bleibt (216b) erfüllt, wenn α_1 jetzt der Kosinus des Reflexionswinkels ist. Wie der Reflexionswinkel des zweiten Vorganges gleich dem Einfallswinkel des ersten ist, so ist nach (217) die kleinere Schwingungszahl ν_1 jetzt diejenige des reflektierten Bündels. Folglich sind nach (219) die in der Sekunde um-

gewandelten Mengen strahlender Wärme die gleichen wie vorher; die Umwandlung geschieht indessen in entgegengesetztem Sinne. Die gleiche Arbeit, die vorher gegen den Strahlungsdruck geleistet wurde, wird nunmehr von ihm geleistet. Im thermodynamischen Sinne gesprochen macht also der zweite Vorgang den ersten rückgängig. Die Reflexion eines Lichtbündels durch einen bewegten vollkommenen Spiegel ist ein reversibler Prozeß.

Den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik auf die in der Sekunde umgewandelten Wärmemengen anwendend, erhalten wir

$$\frac{S_1(\alpha_1+\beta_x)}{\vartheta_1}=\frac{S_2(\alpha_2-\beta_x)}{\vartheta_2}. \tag{227}$$

Dabei sind ϑ_1 und ϑ_2 die Temperaturen der beiden monochromatischen Lichtbündel, gemäß der thermodynamischen Definition der absoluten Temperatur.

Aus (227) in Verbindung mit der aus dem Dopplerschen Prinzip und der Energie- und Impulsgleichung abgeleiteten Relation (219) folgt

$$\vartheta_1:\vartheta_2=\nu_1:\nu_2. \tag{227a}$$

Die Temperaturen der beiden Lichtbündel verhalten sich wie ihre Schwingungszahlen.

Hieraus und aus (226) ergibt sich

$$H_1:H_2=\vartheta_1^3:\vartheta_2^3. \tag{227b}$$

Die Helligkeiten der beiden monochromatischen Bündel verhalten sich wie die dritten Potenzen der absoluten Temperaturen. An Stelle von (225) aber können wir schreiben

$$H_1\,d\nu_1:H_2\,d\nu_2=\vartheta_1^4:\vartheta_2^4. \tag{227c}$$

Wir forderten oben, daß einem jeden monochromatischen Lichtbündel eine Temperatur zugeordnet werde, welche eindeutig durch seine Farbe und Helligkeit bestimmt ist. Diese Zuordnung muß, wie für jedes Lichtbündel, so auch für die beiden hier betrachteten gelten. Die Relationen (227a, b)

schränken die Form dieser universellen Beziehung ein; die allgemeinste, ihnen genügende Bestimmung der Temperatur ist:

$$\vartheta = \nu \cdot f\left(\frac{H}{\vartheta^3}\right), \tag{228}$$

wo f eine willkürliche Funktion ist. Wir können dafür auch schreiben

$$H = \vartheta^3 \cdot g\left(\frac{\vartheta}{\nu}\right). \tag{228a}$$

Damit haben wir das thermodynamische Gesetz der Wellenstrahlung erhalten.

Die beiden Relationen (227a) und (227b), aus denen das Gesetz sich ergibt, mögen als Verschiebungsgesetz und Verstärkungsgesetz bezeichnet werden. Das Verschiebungsgesetz (227a) ordnet bei der Vergleichung der Helligkeiten, die zwei verschiedenen Temperaturen entsprechen, zwei verschiedene Farben einander zu, deren Schwingungszahlen im Verhältnis der Temperaturen stehen. Das Verstärkungsgesetz (227b) besagt sodann, daß die Helligkeiten der einander so zugeordneten Farben sich verhalten wie die dritten Potenzen der absoluten Temperaturen. Ist für eine gegebene Temperatur empirisch die Helligkeit in ihrer Abhängigkeit von der Schwingungszahl gegeben, so ist diese Abhängigkeit durch das thermodynamische Strahlungsgesetz (228a) für jede andere Temperatur bestimmt.

Das Verstärkungsgesetz hat zuerst L. Boltzmann [5]) abgeleitet, indem er einen von Bartoli angegebenen Kreisprozeß verwandte und den Maxwellschen Lichtdruck einführte. Er erhielt es nicht in der Form (227b), sondern in derjenigen Form, die aus (227c) hervorgeht, wenn man zwei Lichtbündel betrachtet, in denen alle Farben die gleiche Temperatur ϑ_1 bzw. ϑ_2 besitzen. Es wird gestattet sein, solches Licht, in welchem alle Farben vertreten sind, und zwar mit der gleichen Temperatur, als „weißes Licht" zu bezeichnen. Vergleicht man die Gesamthelligkeiten zweier weißer Lichtbündel, so wird

$$\int_0^\infty H_1 d\nu_1 : \int_0^\infty H_2 d\nu_2 = \vartheta_1{}^4 : \vartheta_2{}^4. \tag{228b}$$

Die gesamten Helligkeiten zweier Bündel weißen Lichtes verhalten sich wie die vierten Potenzen ihrer absoluten Temperaturen. Das ist das Gesetz, welches zuerst von Stefan als empirisches Gesetz aufgestellt und dann, wie erwähnt, von Boltzmann theoretisch begründet wurde. Die Gleichung (227c) überträgt das Stefan-Boltzmannsche Gesetz auf zwei monochromatische Lichtbündel.

Das Verschiebungsgesetz wurde zuerst von W. Wien angegeben.[68]) Doch vermochte dieser Autor es nicht, den Zusammenhang desselben mit dem Dopplerschen Prinzip und dem Strahlungsdrucke in einwandsfreier Weise zu formulieren. Das gelingt in der Tat nur dann, wenn man von einer präzisen Lösung des Problemes der Lichtreflexion durch einen bewegten Spiegel ausgeht. Auf dem hier verfolgten, zuerst vom Verfasser dieses Werkes eingeschlagenen Wege[2]) erhält man das Verschiebungsgesetz und das Verstärkungsgesetz mit einem Schlage; ihr Zusammenhang mit den Prinzipien der elektromagnetischen Mechanik tritt bei dem gegebenen Beweise deutlich hervor. Wir durften uns nicht mit der Lösung des Reflexionsproblemes für den Fall senkrechter Inzidenz ebener Wellen begnügen, weil die Kenntnis des Verhältnisses der Öffnungswinkel der beiden Lichtbündel zur Ermittelung des Verhältnisses der Helligkeiten erforderlich war und das Verhältnis der Öffnungswinkel (221) durch Differentiation von α_2 nach α_1 erhalten wird. Um diese Differentiation ausführen zu können, muß das Reflexionsproblem für den Fall schiefer Inzidenz gelöst sein.

Wie man sieht, ergibt sich das thermodynamische Gesetz der natürlichen Strahlung aus den allgemeinen Eigenschaften der elektromagnetischen Strahlung auf Grund des thermodynamischen Temperaturbegriffes. Das Gesetz ist auf jede beliebige natürliche Licht- und Wärmestrahlung anzuwenden, wie sie auch immer entstanden sein mag. Die so bestimmte Temperatur der Strahlung ist aber im allgemeinen durchaus nicht mit der Temperatur des strahlenden Körpers identisch. Wir müssen die Beziehungen, die zwischen der Temperatur

des emittierenden Körpers und der Temperatur der entsandten Strahlung bestehen, hier kurz erläutern, da auf ihnen die Vergleichung der strahlungstheoretischen und der gewöhnlichen gastheoretischen Temperaturskala beruht.

Natürliches Licht kann auf zwei wesentlich verschiedene Weisen entstehen: Durch reine Temperaturstrahlung und durch Luminiszenz. Die reine Temperaturstrahlung ist ein rein thermischer Vorgang. Die Energie der Wellen entstammt dem Wärmevorrat des emittierenden Körpers und ist durch seine Temperatur bestimmt; chemische und elektrische Vorgänge spielen bei dieser Art der Emission nicht mit. Bei der Luminiszenz hingegen spielen Vorgänge nicht thermischer Natur mit, und demgemäß ist die entsandte Strahlung nicht ausschließlich durch die Temperatur der Lichtquelle bedingt. Daher kann bei den Vorgängen der Luminiszenz von einer allgemein gültigen Beziehung zwischen den Temperaturen der Lichtquelle und der Strahlung keine Rede sein. Man hat gefunden, daß zu den auf Luminiszenz beruhenden Vorgängen die Emission der Linienspektra gehört. Die Temperatur des Lichtes der Spektrallinien gestattet daher durchaus keinen Rückschluß auf die Temperatur des entsendenden Körpers.

Für die reine Temperaturstrahlung lassen sich Beziehungen zur Temperatur des leuchtenden Körpers aus der Thermodynamik ableiten. Man denke sich einen Hohlraum, dessen Wände reine Temperaturstrahler sind; diese Wände seien auf einer gegebenen Temperatur ϑ gehalten. Nach dem Clausiusschen Axiome müssen sich in diesem Systeme, da andere als rein thermische Vorgänge ausgeschlossen sind, die Temperaturen ausgleichen; es muß sich schließlich ein thermischer Gleichgewichtszustand herstellen, bei welchem alle Teile des Systemes die gleiche Temperatur ϑ besitzen. Das gilt nicht nur von der Temperatur der materiellen Körper, die man etwa in den Hohlraum bringen mag, sondern auch von der Temperatur der den Hohlraum erfüllenden Strahlung selbst. Die Temperatur der Hohlraumstrahlung ist gleich der Temperatur der Wände. Ein im Innern des Hohlraumes

befindlicher Beobachter würde von allen Seiten Licht der gleichen Helligkeit und der gleichen spektralen Zusammensetzung empfangen. Die Helligkeit muß sich der Temperatur des Hohlraumes so zuordnen, wie es das thermodynamische Strahlungsgesetz (228a) fordert. Die Temperatur aller Farben muß die gleiche sein, so daß das Licht als „weiß" in dem oben angegebenen Sinne zu bezeichnen ist. Könnte man sich in das Innere eines Hohlraumes begeben, dessen Wände so stark erhitzt sind, daß sie infolge ihrer Temperatur leuchten, so könnte man das thermodynamische Strahlungsgesetz experimentell prüfen, wenigstens in demjenigen Temperaturbereiche, in welchem eine auf der gastheoretischen Skala beruhende Temperturmessung möglich ist.

Da es nun aus naheliegenden Gründen unmöglich ist, sich in einen derartig erhitzten Hohlraum hineinzubegeben, so hat man einen Kunstgriff angewandt; derselbe war nicht so selbstverständlich, wie er uns jetzt erscheinen mag; er besteht darin, daß man in die Wand des Hohlraumes ein kleines Loch bohrt und durch dieses hineinblickt. Dieser Gedanke ist zuerst von L. Boltzmann [5]) ausgesprochen und später von O. Lummer und W. Wien [35]) durchgeführt worden. Ist die Öffnung des Hohlraumes hinreichend klein, so stört sie die Herstellung des thermischen Gleichgewichtes im Hohlraume nicht; die entsandte Strahlung ist dann diejenige „weiße Strahlung", welche der Temperatur des Hohlraumes entspricht. Die experimentelle Untersuchung der Hohlraumstrahlung durch O. Lummer und E. Pringsheim [36]) hat sowohl das auf die Gesamtstrahlung bezügliche Stefan-Boltzmannsche Verstärkungsgesetz, als auch das Verschiebungsgesetz durchaus bestätigt. Von einer Bestätigung kann natürlich nur so weit die Rede sein, als die auf den Gasgesetzen beruhende Temperaturskala sich realisieren läßt. Bei Temperaturen oberhalb 1200° C stößt die Anwendung der gastheoretischen Skala auf Schwierigkeiten. Hier ist diese Skala durch die strahlungstheoretische Temperaturskala zu ersetzen, welche sich auf das thermodynamische Strahlungsgesetz gründet.

Die experimentelle Untersuchung der aus dem Hohlraume heraustretenden Strahlung hat nicht nur zur Bestätigung des thermodynamischen Strahlungsgesetzes (228a) geführt, sondern auch zur Bestimmung der dort noch willkürlich gelassenen Funktion der Variabeln $\left(\frac{\vartheta}{\nu}\right)$. Die Messungen, an denen hauptsächlich O. Lummer und E. Pringsheim, H. Rubens und F. Kurlbaum sowie F. Paschen Anteil haben, sind von M. Planck[43] durch die Formel zur Darstellung gebracht worden:

$$H = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k\vartheta}} - 1}, \tag{229}$$

mit den Werten der Konstanten k und h:

$$k = 1{,}346 \cdot 10^{-16} \frac{\text{erg}}{\text{grad}} \tag{229a}$$

$$h = 6{,}55 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec}. \tag{229b}$$

Was die theoretische Begründung des Planckschen Strahlungsgesetzes anbelangt, so mag auf die einschlägigen Arbeiten von M. Planck, insbesondere auf seine „Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung“ verwiesen werden[43]. Von Wichtigkeit ist insbesondere die Bedeutung der universellen Konstanten k; dieselbe steht in Beziehung zu der sogenannten Boltzmann-Drudeschen Konstanten α, d. h. der mittleren Kraft eines Moleküls bei der absoluten Temperatur 1. Es gilt nämlich nach Planck:

$$\alpha = \frac{3}{2} k = 2{,}02 \cdot 10^{-16} \frac{\text{erg}}{\text{grad}}.$$

Mit der Boltzmann-Drudeschen Konstanten ist der Wert der Masse eines Wasserstoffatoms eng verknüpft, und dieser wieder hängt mit dem elektrischen Elementarquantum zusammen (vgl. § 1). So kann denn aus der Konstante k der Strahlungsformel der Wert des elektrischen Elementarquantums ermittelt werden. Es ergibt sich nach Planck

$$e = 4{,}69 \cdot 10^{-10} \tag{230}$$

elektrostatische Einheiten, was nicht so sehr von dem in § 1 angegebenen, auf ganz verschiedenem Wege gefundenen Werte (2) abweicht.

Wie k, so muß auch die Konstante h der Strahlungsformel eine universelle Bedeutung haben; da die einzige elektromagnetische Konstante des Äthers die Lichtgeschwindigkeit c ist, so muß es sich um eine Konstante handeln, welche von den Eigenschaften der ponderablen Materie oder der Elektronen abhängt; es muß aber eine von den individuellen Eigenschaften des Körpers unabhängige Größe sein.

Merkwürdigerweise fällt für sehr hohe Temperaturen, bzw. für sehr lange Wellen die Konstante h aus der Strahlungsformel heraus, und es wird die Helligkeit proportional der Konstanten k und damit der Boltzmann-Drudeschen Konstanten α; denn (229) geht, für hinreichend große Werte von $\frac{\vartheta}{\nu}$, über in

$$H = 2k\vartheta \cdot \frac{\nu^2}{c^2} = \frac{4}{3}\frac{\nu^2}{c^2} \cdot \alpha\vartheta.$$

Eine direkte Ableitung dieser Formel aus der Elektronentheorie der Metalle hat H. A. Lorentz[34]) gegeben. Doch führt der von ihm eingeschlagene Weg nicht zu dem allgemeinen Planckschen Strahlungsgesetze. Das Verständnis dieses Gesetzes auf Grund anerkannter Prinzipien der Elektrodynamik und Kinetik scheint einstweilen noch nicht möglich zu sein. Damit hängt auch die Frage nach der Bedeutung der universellen Konstanten h zusammen.

§ 44. Dynamik des bewegten Hohlraumes.

Wie wir im vorigen Paragraphen erwähnt haben, stellt sich im Innern eines Hohlraumes, dessen Wände eine und dieselbe Temperatur besitzen, ein stationärer Strahlungszustand her. Dabei ist die unter einem Öffnungswinkel ω einfallende Strahlung S dem Öffnungswinkel ω proportional, d. h. es ist der Quotient $K = \frac{S}{\omega}$, die sogenannte „spezifische Strahlungsintensität“ von der Richtung des Strahles unabhängig. Dies

gilt unter der Voraussetzung, daß der Hohlraum ruht, in bezug auf ein Koordinatensystem, in welchem die Geschwindigkeit c des Lichtes von der Richtung unabhängig ist, und daß die Strahlung von einer gleichfalls ruhenden Fläche aufgefangen wird.

Wie liegt nun die Sache, wenn der Hohlraum gegen jenes Bezugssystem und damit gegen die auffangende Fläche in Bewegung begriffen ist? Auch dann wird sich, wenn die Temperatur der Wände allerseits die gleiche ist, bei gleichförmiger Bewegung ein stationärer Strahlungszustand herstellen. Es wird aber sehr wohl die mit Hilfe der ruhenden Fläche gemessene spezifische Strahlungsintensität

$$K(\varphi, \beta) = \frac{S}{\omega},$$

bei gegebenem Quotienten β aus Betrag der Geschwindigkeit $|\mathfrak{w}|$ und Lichtgeschwindigkeit c, noch von dem Winkel φ abhängen können, den die Vektoren $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{c}$ miteinander einschließen (vgl. Abb. 5 des § 41).

Die Theorie, die wir in den vorangehenden Paragraphen entwickelt haben, ist nun imstande, die Abhängigkeit der spezifischen Strahlungsintensität von der Richtung vollkommen festzustellen. Dies hat der zu früh verstorbene K. v. Mosengeil[40]) in seiner Dissertation gezeigt.

Er denkt sich im Innern des bewegten Hohlraumes, und mit diesem sich bewegend, einen vollkommenen Spiegel. Der Strahl, welcher vor der Reflexion den Winkel φ mit der Bewegungsrichtung des Spiegels einschloß, wird nach der Reflexion den Winkel φ' mit dem Vektor $\mathfrak{w}$ bilden. Da nun, nach den Gl. (222) und (221) des § 42, bei der Reflexion am bewegten Spiegel die Strahlungen wie die Quadrate, die Öffnungswinkel jedoch wie die reziproken Quadrate der von einem ruhenden Beobachter gezählten Schwingungszahlen sich ändern, so folgt bei Heranziehung des Dopplerschen Prinzips (Gl. 214b) für das Verhältnis der spezifischen Intensitäten der einfallenden und der reflektierten Strahlung:

$$\frac{K(\varphi, \beta)}{K(\varphi', \beta)} = \left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^4 = \left(\frac{1-\beta\cos\varphi}{1-\beta\cos\varphi'}\right)^{-4}.$$

Nun kann aber durch Anbringung des mitbewegten Spiegels der nur von der Temperatur abhängige Strahlungszustand in dem bewegten Hohlraume nicht geändert werden. Es ist also die spezifische Strahlungsintensität $K(\varphi', \beta)$ identisch mit derjenigen, die auch ohne Anbringung des Spiegels im Hohlraume, in Richtungen, welche mit seiner Bewegungsrichtung den Winkel φ' einschließen, anzutreffen wäre. Wird speziell φ' gleich $\frac{\pi}{2}$ gesetzt, so ergibt sich:

$$K(\varphi, \beta) = K\left(\frac{\pi}{2}, \beta\right) \cdot (1 - \beta \cos \varphi)^{-4}; \tag{231}$$

damit ist die Abhängigkeit der spezifischen Strahlungsintensität von der Strahlrichtung ermittelt.

Dem stationären Strahlungszustand wird im Innern des bewegten Hohlraumes eine bestimmte Dichte der Energie und der Bewegungsgröße entsprechen. Man berechnet dieselben durch Summation der Beiträge der aus allen den Richtungen kommenden, inkohärenten Strahlen. Zur Energiedichte liefert die Strahlung S den Beitrag $\frac{S}{c}$; es wird daher die Dichte der elektromagnetischen Energie:

$$w = \frac{2\pi}{c} \int_0^\pi d\varphi \sin \varphi \, K(\varphi, \beta). \tag{231a}$$

Zur Dichte des Impulses liefert der Strahl $\mathfrak{S}$ den Beitrag $\frac{\mathfrak{S}}{c^2}$, welcher der Strahlrichtung parallel ist und somit den Winkel φ mit der Bewegungsrichtung des Hohlraumes bildet. Die resultierende Dichte der elektromagnetischen Bewegungsgröße, die nach der Symmetrie der Bewegungsrichtung parallel ist, wird somit

$$|\mathfrak{g}| = \frac{2\pi}{c^2} \int_0^\pi d\varphi \sin \varphi \cos \varphi \, K(\varphi, \beta). \tag{231b}$$

Einem gegebenen Volumen des bewegten Hohlraumes entsprechen demnach bestimmte Beträge der Energie und des

Impulses der ihn erfüllenden Strahlung; da dieselben bei gleichförmiger Bewegung konstant sind, so folgt: Zur Aufrechterhaltung einer gleichförmigen Bewegung des Hohlraumes bedarf es keiner äußeren Kraft.

Denken wir uns einen Hohlraum von zylindrischer Gestalt der Achse parallel bewegt, so werden auf die zur Bewegungsrichtung senkrechten Grundflächen entgegengesetzt gleiche Kräfte wirken, d. h. der Strahlungsdruck wird für beide Grundflächen derselbe sein. Wir können ihn berechnen, indem wir ein Element einer der Grundflächen mit einem Spiegelchen belegt denken — hierdurch wird ja der Strahlungszustand nicht geändert —, und indem wir eine von F. Hasenöhrl[13]) herrührende Betrachtung anstellen, welche der in § 42 bei der Aufstellung der Gl. (215a) angewandten entspricht. Die Arbeitsleistung am bewegten Spiegel gegen den Strahlungsdruck p ist dem Überschuß der entsandten über die aufgefangene Energie gleich. Einfallende und reflektierte Strahlen zusammen erfüllen einen Kegel, in welchem φ alle zwischen 0 und π liegenden Werte durchläuft; für jeden Wert von φ ist die Energiedichte der Strahlung zu multiplizieren mit der zum Spiegel senkrechten Komponente der Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{c} - \mathfrak{w}$, d. h. mit $c(\cos\varphi - \beta)$; je nachdem dieselbe positiv oder negativ ist, hat man es mit einem reflektierten oder mit einem einfallenden Strahle zu tun. Es wird daher:

$$p\beta = \frac{2\pi}{c}\int_0^\pi d\varphi \sin\varphi(\cos\varphi - \beta) K(\varphi, \beta). \tag{231c}$$

Hieraus und aus (231a, b) folgt

$$p = |\mathfrak{g}| \frac{c}{\beta} - w. \tag{232}$$

Damit ist auch der Strahlungsdruck auf die zur Bewegungsrichtung senkrechten Wände des bewegten Hohlraumes bestimmt.

Die Einführung des in (231) erhaltenen Wertes von $K(\varphi, \beta)$ in (231a, b) ergibt:

$$w = \frac{2\pi}{c} K\left(\frac{\pi}{2}, \beta\right) \int_0^\pi \frac{d\varphi \sin\varphi}{(1-\beta\cos\varphi)^4},$$

$$|\mathfrak{g}| = \frac{2\pi}{c^2} K\left(\frac{\pi}{2}, \beta\right) \int_0^\pi \frac{d\varphi \sin\varphi \cos\varphi}{(1-\beta\cos\varphi)^4}.$$

Die Integrale lassen sich ausrechnen; man erhält[40]):

$$w = \frac{4\pi}{c} K\left(\frac{\pi}{2}, \beta\right) \cdot \frac{1+\frac{1}{3}\beta^2}{(1-\beta^2)^3}, \tag{232a}$$

$$|\mathfrak{g}| = \frac{16\pi}{3c^2} K\left(\frac{\pi}{2}, \beta\right) \cdot \frac{\beta}{(1-\beta^2)^3}, \tag{232b}$$

und nach (232):

$$p = \frac{4\pi}{3c} K\left(\frac{\pi}{2}, \beta\right) \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)^2}. \tag{232c}$$

Im Falle der Ruhe wird die Energie eines Hohlraumes vom Volumen V

$$W_0 = w_0 V = \frac{4\pi}{c} K_0 V. \tag{233}$$

Der Druck wird in diesem Falle gleich dem dritten Teile der Energiedichte:

$$p_0 = \tfrac{1}{3} w_0 = \frac{4\pi}{3c} K_0. \tag{233a}$$

Die elektromagnetische Bewegungsgröße ist gleich Null, wenn der Hohlraum ruht; bewegt er sich langsam, so folgt aus (232), unter Beschränkung auf die zu β proportionalen Glieder, für die Bewegungsgröße:

$$G_0 = |\mathfrak{g}_0| V = \frac{\beta}{c}(w_0 + p_0) V = \frac{4}{3c^2} W_0 |\mathfrak{w}|. \tag{233b}$$

Denkt man sich nun eine quasistationäre Bewegung des Hohlraumes, d. h. eine solche, bei der die Strahlungsverteilung jeweils der Geschwindigkeit entspricht, so wird eine Zunahme der Geschwindigkeit einen Zuwachs an Bewegungsgröße erfordern und damit eine der Beschleunigung proportionale äußere Kraft. Es wird also der strahlungserfüllte Hohlraum ähnlich wie das Elektron eine elektromagnetische

Masse besitzen. Bei langsamer Bewegung, wo die Unterscheidung der longitudinalen und der transversalen Masse nicht notwendig ist, folgt aus (233b) als Wert der Masse

$$m_0 = \frac{G_0}{|\mathfrak{w}|} = \frac{4}{3c^2} W_0. \tag{233c}$$

Es ist das Verhältnis der elektromagnetischen Masse des Hohlraumes zu seiner Energie im Falle der Ruhe genau das gleiche wie für das Elektron.

Die Existenz einer trägen Masse der Hohlraumstrahlung ist zuerst von F. Hasenöhrl[13]) behauptet worden. Ihr Wert ist im Verhältnis zur materiellen Masse der Wände leider so gering, daß ein experimenteller Nachweis einstweilen zu schwierig erscheint. Es ist jedoch das Problem, die strenge Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit für den bewegten Hohlraum zu ermitteln, von großem theoretischem Interesse. Die Methoden der Thermodynamik gestatten es, wie M. Planck[45]) gezeigt hat, dieses Problem auf Grund der obigen Resultate zu lösen; sie bestimmen wenigstens für quasistationäre Vorgänge die mechanischen und thermischen Eigenschaften des Hohlraumes.

Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik ist der Energiezuwachs des Hohlraumes gleich der Summe aus der von äußeren Kräften geleisteten Arbeit A und der zugeführten Wärme Q:

$$dW = A + Q. \tag{234}$$

Die äußere Arbeit setzt sich zusammen aus der Beschleunigungsarbeit und der Kompressionsarbeit. Erfolgt die Beschleunigung quasistationär, d. h. so allmählich, daß die Strahlung Zeit hat, den der betreffenden Geschwindigkeit entsprechenden Gleichgewichtszustand anzunehmen, so ist die bei der Beschleunigung zu leistende Arbeit gleich dem Produkt aus der Geschwindigkeit und dem Zuwachs der Bewegungsgröße. Andererseits ist die Kompressionsarbeit, wenn das Volumen des zylindrischen Hohlraumes durch langsame Verschiebung einer der beiden zur Bewegungsrichtung senkrechten Grundflächen gegen den

Druck p verringert wird, gleich dem Produkt aus Druck und Volumabnahme. Die gesamte Arbeit der äußeren Kräfte wird somit:

(234a) $$A = \beta c d G - p d V.$$

Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik ist weiter die zugeführte Wärme gleich dem Produkt aus der Temperatur ϑ und der Zunahme der Entropie S des Hohlraumes:

(234b) $$Q = \vartheta d S.$$

Es wird somit der Zuwachs der elektromagnetischen Energie der den Hohlraum erfüllenden Strahlung bei einer quasistationären Zustandsänderung:

(235) $$d W = \beta c d G - p d V + \vartheta d S.$$

Man erreicht für die Dynamik des Hohlraumes ähnliche Vorteile wie für die Dynamik des Elektrons durch Einführung der Lagrangeschen Funktion, wenn man sich des sogenannten „kinetischen Potentiales“ bedient, welches definiert wird durch:

(236) $$H = \vartheta S + \beta c G - W.$$

Der Zuwachs des kinetischen Potentiales bei einer beliebigen quasistationären Zustandsänderung des Hohlraumes, bei der die drei unabhängigen Variabeln, nämlich die Temperatur ϑ, die Geschwindigkeit $c\beta$ und das Volumen V, gewisse Änderungen erfahren, wird, mit Rücksicht auf (235):

(236a) $$d H = S d\vartheta + G c d\beta + p d V.$$

Man kann folglich, durch Differentiation des kinetischen Potentiales nach den Unabhängigen ϑ, β und V, Entropie, Bewegungsgröße und Druck ableiten:

(236b) $$S = \frac{\partial H}{\partial \vartheta}, \quad G = \frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial \beta}, \quad p = \frac{\partial H}{\partial V}.$$

Wie Bewegungsgröße, Energie und Entropie, so wird, gemäß (236), auch das kinetische Potential dem Volumen des Hohlraumes proportional sein; mithin wird der Ansatz zutreffen:

(237) $$H = V \cdot h(\vartheta, \beta).$$

Aus (236) und (236b) folgt

(237a) $$h = \vartheta \frac{\partial h}{\partial \vartheta} + \beta c |\mathfrak{g}| - w$$

(237b) $$c|\mathfrak{g}| = \frac{\partial h}{\partial \beta}, \quad p = h.$$

Zieht man noch die aus den Mosengeilschen Gleichungen (232a, b, c) folgenden Beziehungen heran:

(237c) $$c|\mathfrak{g}| = w \cdot \frac{4\beta}{3+\beta^2},$$

(237d) $$p = w \cdot \frac{1-\beta^2}{3+\beta^2},$$

so kann man die Funktion h in ihrer Abhängigkeit von ϑ und β bestimmen.

Was zunächst die Abhängigkeit von β anbelangt, so ergibt sich aus (237b, c, d):

$$\frac{\partial h}{\partial \beta} = h \cdot \frac{4\beta}{1-\beta^2}.$$

Diese partielle Differentialgleichung wird integriert durch

(238) $$h = \frac{\Theta}{(1-\beta^2)^2},$$

wo Θ eine zunächst noch willkürliche Funktion der Temperatur ϑ ist. Aus (237b) erhält man:

(238a) $$p = \frac{\Theta}{(1-\beta^2)^2},$$

(238b) $$|\mathfrak{g}| = \frac{\Theta}{c} \cdot \frac{4\beta}{(1-\beta^2)^3},$$

und aus (237c) oder (237d):

(238c) $$w = \Theta \cdot \frac{3+\beta^2}{(1-\beta^2)^3}.$$

Aus (237a) folgt demnach die zur Bestimmung der Temperaturfunktion $\Theta(\vartheta)$ dienende Gleichung

$$\vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} = 4\Theta.$$

Die Integration ergibt

$$\Theta = \frac{a}{3}\vartheta^4, \tag{238d}$$

wobei a eine Integrationskonstante darstellt.

Auf Grund von (237) und (238) ergibt sich jetzt der Ausdruck des kinetischen Potentiales[45]):

$$H = \frac{a}{3} \cdot \frac{\vartheta^4 V}{(1-\beta^2)^2}; \tag{239}$$

hieraus leiten sich die Werte der Bewegungsgröße, Energie und Entropie des bewegten Hohlraumes und des auf die Grundflächen des Zylinders wirkenden Druckes ab:

$$G = \frac{4a}{3c}\vartheta^4 V \frac{\beta}{(1-\beta^2)^3}, \tag{239a}$$

$$W = \frac{a}{3}\vartheta^4 V \frac{3+\beta^2}{(1-\beta^2)^3} \tag{239b}$$

$$S = \frac{4a}{3}\frac{\vartheta^3 V}{(1-\beta^2)^2}, \tag{239c}$$

$$p = \frac{a}{3}\frac{\vartheta^4}{(1-\beta^2)^2}. \tag{239d}$$

Die zwischen diesen Größen bestehende Beziehung

$$G = \frac{\beta}{c}(W + pV) \tag{239e}$$

hätte auch unmittelbar aus (232) abgeleitet werden können[18]).

Für den Fall der Ruhe ist die elektromagnetische Energie der Hohlraumstrahlung

$$W_0 = a\vartheta^4 V; \tag{239f}$$

hieraus ergibt sich die physikalische Bedeutung der Konstanten a; dieselbe ist eng mit der Konstanten des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes (§ 43) verknüpft.

Die Theorie der elektromagnetischen Strahlung ist, wie wir sehen, in der Lage, alle für die Dynamik und Thermodynamik des bewegten Hohlraumes in Betracht kommenden Größen zu berechnen. Insbesondere interessiert die elektro-

magnetische Masse der Hohlraumstrahlung; die transversale Masse ist:

$$(240)\qquad m_r = \frac{G}{c\beta} = \frac{4a}{3c^2}\frac{\vartheta^4 V}{(1-\beta^2)^3} = \frac{1}{c^2}(W + pV).$$

Die bei longitudinaler Beschleunigung in Rechnung zu setzende Masse ist erst dann völlig bestimmt, wenn man angibt, in welcher Weise die Zustandsänderung erfolgen soll. Werden Temperatur ϑ und Volumen V konstant gehalten, so wird die „isotherm-isochore Masse[40])“:

$$(240\text{a})\qquad \frac{1}{c}\left(\frac{dG}{d\beta}\right)_{\vartheta, V} = \frac{4a}{3c^3}\vartheta^4 V \frac{1+5\beta^2}{(1-\beta^2)^4}.$$

Wird indessen, außer dem Volumen, die Entropie konstant gehalten, so berechnet sich aus (239c) die Temperatur und dann aus (239a) die Bewegungsgröße:

$$G = \frac{1}{c}\cdot\left(\frac{3S^4}{4aV}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{3}}}.$$

Es drückt sich somit die transversale Masse durch S und V folgendermaßen aus:

$$(240\text{b})\qquad m_r = \frac{G}{c\beta} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{3S^4}{4aV}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{3}}},$$

während der Wert der „longitudinalen, adiabatisch-isochoren Masse“ wird[40]):

$$(240\text{c})\qquad \frac{1}{c}\left(\frac{\partial G}{\partial \beta}\right)_{S, V} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{3S^4}{4aV}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1-\frac{1}{3}\beta^2}{(1-\beta^2)^{\frac{4}{3}}}.$$

Die Abhängigkeit von der Geschwindigkeit ist hier genau die gleiche wie bei der transversalen und der longitudinalen Masse des Buchererschen Elektrons (§ 22).

Werden drittens Entropie und Druck konstant gehalten, so sind Temperatur und Volumen aus (239c, d) zu berechnen, und es ergibt sich für die Bewegungsgröße der Ausdruck:

$$G = \frac{S}{c}\left(\frac{3p}{a}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Durch S und p drückt sich folglich die transversale Masse so aus:

$$(240\text{d}) \qquad m_r = \frac{G}{c\beta} = \frac{S}{c^2}\left(\frac{3p}{a}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}},$$

während als Wert der „longitudinalen, adiabatisch-isobare Masse“ sich ergibt[45]):

$$(240\text{e}) \qquad \frac{1}{c}\left(\frac{dG}{d\beta}\right)_{S,p} = \frac{S}{c^2}\left(\frac{3p}{a}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die in (240d, e) erhaltene Abhängigkeit von der Geschwindigkeit ist ganz dieselbe wie bei dem Lorentzschen Elektron (§ 22). Während aber hier beim Hohlraum der Energiezuwachs zum Teil durch Kompressionsarbeit gegen den konstanten Strahlungsdruck bedingt ist, bleibt beim Lorentzschen Elektron der entsprechende Teil des Energiezuwachses unerklärt.

§ 45. Der Lichtweg in einem gleichförmig bewegten System.

Wir hatten in § 41 die Aberration des Fixsternlichtes erklärt, indem wir zeigten, daß nach der Lorentzschen Theorie die Richtung des von einem mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ bewegten Beobachter wahrgenommenen relativen Strahles durch den Vektor bestimmt ist (Gl. 209):

$$\mathfrak{c}' = \mathfrak{c} - \mathfrak{w},$$

d. h. durch den Vektor der Relativgeschwindigkeit von Licht und Beobachter. Unter $\mathfrak{w}$ war dabei die Geschwindigkeit der Erde zu verstehen. Berücksichtigt man nur die Umlaufsbewegung um die Sonne, indem man eine gemeinsame Bewegung des gesamten Sonnensystemes zunächst außer acht läßt, so ist $|\mathfrak{w}|$ nahezu konstant; es ist

$$\beta = \frac{|\mathfrak{w}|}{c} = 10^{-4}.$$

Welchen Einfluß hat nun die Erdbewegung auf dasjenige Licht, welches von irdischen Lichtquellen entsandt wird? Läßt

sich nicht durch Beobachtung dieses Lichtes, also durch optische Versuche im Laboratorium, die Bewegung der Erde feststellen? Diese Frage führt uns dazu, die Lichtfortpflanzung in einem gleichförmig bewegten Systeme zu behandeln.

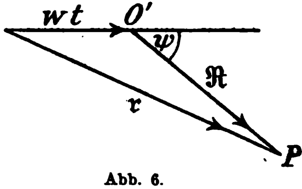


Abb. 6.

Wir denken uns zur Zeit $t = 0$ vom Punkte O aus (Abb. 6) ein Lichtsignal entsandt. Zur Zeit t mag es im Aufpunkte P eintreffen. Die absolute Strahlrichtung wird durch den von O nach P gezogenen Fahrstrahl $\mathfrak{r}$ angezeigt. In dem Zeitintervalle t hat die Lichtquelle sich, mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$, von O nach O' bewegt. Der von O' nach P gezogene Fahrstrahl

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r} - \mathfrak{w}t \tag{241}$$

hat die Komponenten

$$X = x - \beta l, \quad Y = y, \quad Z = z, \tag{241a}$$

wenn unter x, y, z die Komponenten von $\mathfrak{r}$, unter

$$l = |\mathfrak{r}| = ct \tag{241b}$$

der im absoluten Strahlengang zurückgelegte Lichtweg verstanden wird. Da

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{c}\,\frac{l}{c},$$

so kann (241) auch geschrieben werden:

$$\mathfrak{R} = (\mathfrak{c} - \mathfrak{w})\frac{l}{c} = \mathfrak{c}'\frac{l}{c}. \tag{241c}$$

Es wird demnach die Richtung des relativen Strahles durch den von der gleichzeitigen Lage der Lichtquelle aus gezogenen Fahrstrahl angezeigt, d. h. in einem gleichförmig bewegten Systeme sieht man die Lichtquelle dort, wo sie sich gerade befindet. Die gemeinsame Bewegung von Lichtquelle und Beobachter ist demnach durch Beobachtung der Strahlrichtung durchaus nicht festzustellen.

Dagegen sollte man vermuten, daß die Erdbewegung durch Messung des Lichtweges sich feststellen ließe. Denn die durch P gehende Fläche konstanten absoluten Lichtweges ist eine Kugel um O; der Punkt O' jedoch, von welchem die relativen Strahlen ausgehen, liegt exzentrisch zu dieser Kugel. Somit würden sich einer gegebenen Länge l des absoluten Lichtweges verschiedene Längen R des relativen Lichtweges $O'P$ zuordnen, je nach der Richtung des Fahrstrahles $O'P$. Es fragt sich, ob auf Grund dieses Umstandes durch Interferenzmessungen ein Einfluß der Erdbewegung festzustellen sein könnte. Die Untersuchung dieser Frage wird durch die folgenden geometrischen Betrachtungen vorbereitet.

Aus dem Dreieck $OO'P$ (Abb. 6), mit den Seitenlängen βl, R, l, folgt:

$$l^2 = \beta^2 l^2 + R^2 + 2\beta l R \cos\psi;$$

somit bestimmt sich, bei gegebenem relativem Lichtweg R, der absolute Lichtweg l aus der Gleichung zweiten Grades

$$l^2 \varkappa^2 - 2\beta l R \cos\psi = R^2,$$

$$\varkappa = \sqrt{1-\beta^2}.$$

Für das stets positive l erhält man

$$\varkappa l = \frac{\beta R \cos\psi}{\varkappa} + \sqrt{R^2 + \frac{\beta^2 R^2 \cos^2\psi}{\varkappa^2}},$$

oder

$$\varkappa l = \frac{\beta X}{\varkappa} + \sqrt{\frac{X^2}{\varkappa^2} + Y^2 + Z^2}. \tag{242}$$

Wir ordnen jetzt dem Fahrstrahl $\mathfrak{R}$ mit den Komponenten X, Y, Z einen Fahrstrahl $\mathfrak{r}'$ zu, mit den Komponenten

$$x' = \frac{X}{\varkappa}, \quad y' = Y, \quad z' = Z. \tag{242a}$$

Während die ursprünglichen Koordinaten x, y, z sich auf ein im Raume festes Achsensystem bezogen, waren die in (241a) eingeführten Koordinaten X, Y, Z in einem mitbewegten Bezugssystem gemessen zu denken. Die nunmehr durch (242a) eingeführten Koordinaten x', y' z' sind diejenigen eines mate-

riellen Systemes, welches aus dem gegebenen Systeme durch eine Streckung parallel der Bewegungsrichtung im Verhältnis

$$1 : \varkappa = 1 : \sqrt{1 - \beta^2}$$

hervorgeht. Es ordnet sich somit einem Heaviside-Ellipsoide des ursprünglichen Systemes Σ im gestreckten Systeme Σ' eine Kugel zu:

$$\sqrt{\frac{X^2}{\varkappa^2} + Y^2 + Z^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = l'. \tag{242b}$$

Jetzt wird Gl. (242) zu:

$$\varkappa l = l' + \beta x'; \tag{243}$$

dabei ist l' der relative Lichtweg in dem Systeme Σ'. Die absoluten Koordinaten eines Punktes in Σ und die relativen Koordinaten des entsprechenden Punktes in Σ' stehen, gemäß (241a), (242a), in dem Zusammenhange

$$\varkappa x' = x - \beta l, \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{243a}$$

Aus (243) und (243a) folgt umgekehrt:

$$\varkappa l' = l - \beta x, \tag{243b}$$

$$\varkappa x = x' + \beta l', \quad y = y', \quad z = z'. \tag{243c}$$

Wir sind jetzt imstande, die Frage zu erörtern, ob durch Messung des Lichtweges ein mit der Erde bewegter Beobachter die Erdbewegung festzustellen vermag. Dabei kommen für Interferenzmessungen im bewegten Systeme nur geschlossene relative Lichtwege in Betracht.

Wir denken uns Licht, im relativen Strahlengang, von O' nach P gesandt, von dort reflektiert und nach O' zurückkehrend. Der zum Fahrstrahl $\mathfrak{R}$ gehörige absolute Lichtweg l_1 ist, nach (243):

$$l_1 = l_1'\varkappa^{-1} + \beta x'\varkappa^{-1},$$

wobei x' und l_1' durch (242a, b) den Komponenten des Fahrstrahles $\mathfrak{R}$ sich zuordnen. Wird nun im relativen Strahlengang der umgekehrte Weg, längs des Fahrstrahles PO' oder $-\mathfrak{R}$, zurückgelegt, so entspricht ihm der absolute Lichtweg

$$l_2 = l_2'\varkappa^{-1} - \beta x'\varkappa^{-1}.$$

Die Summe der beiden absoluten Lichtwege ist demnach

(244) $$l_1 + l_2 = (l'_1 + l'_2)\varkappa^{-1}.$$

Wir denken uns, um O' als Mittelpunkt, eine Kugel vom Radius R geschlagen. Für alle die Punkte P dieser Kugel wäre, im Falle der Ruhe, der Lichtweg $O'PO'$ der gleiche. Anders im Falle der Bewegung; in diesem Falle bestimmt sich, wie (244) besagt, der zu $O'PO'$ gehörige absolute Lichtweg nicht durch den im Systeme Σ gemessenen Abstand $O'P$, sondern durch den im gestreckten Systeme Σ' gemessenen Abstand l'. Dieser aber ist, wie in (242b) gefunden wurde, nicht auf Kugeln, sondern auf Heaviside-Ellipsoiden des Systemes Σ konstant. So kommt es, daß den relativen Lichtwegen $O'PO'$ des Systemes Σ, bei gleicher Länge, je nach der Richtung von $O'P$, verschiedene absolute Lichtwege entsprechen.

Ist $O'P$ parallel der Bewegungsrichtung, so wird, nach (242a)

$$l'_1 + l'_2 = x'_1 + x'_2 = (X_1 + X_2)\varkappa^{-1}.$$

Ist dagegen $O'P$ senkrecht der Bewegungsrichtung, etwa parallel der y-Achse, so hat man

$$l'_1 + l'_2 = y'_1 + y'_2 = Y_1 + Y_2.$$

Demnach sind, gemäß (244), die zugehörigen absoluten Lichtwege

(244a) $$x_1 + x_2 = (X_1 + X_2)\varkappa^{-2},$$

(244b) $$y_1 + y_2 = (Y_1 + Y_2)\varkappa^{-1}.$$

Bei gleichem relativem Lichtwege wäre hiernach der absolute Lichtweg L im ersten Falle im Verhältnis $1 : \varkappa$ größer als im zweiten Falle. Der Unterschied der beiden Lichtwege beträgt

(244c) $$\Delta L = L\{(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} - 1\} = \tfrac{1}{2}\beta^2 L,$$

wenn Größen vierter und höherer Ordnung in β gestrichen werden.

Auf die Entdeckung dieser zuerst von Maxwell aus der Annahme ruhenden Äthers abgeleiteten Differenz der Licht-

wege, welche zwei parallel bzw. senkrecht zur Erdbewegung gerichteten relativen Strahlen entsprechen, zielte der Versuch von A. Michelson[37]) hin. Es wurden zwei Lichtstrahlen zur Interferenz gebracht, welche, von derselben Lichtquelle ausgehend, längs zweier zueinander senkrechter Arme $O'P$ und $O'Q$ sich fortgepflanzt hatten und dort durch Spiegel zurückgesandt waren. Indem jedes Lichtbündel mehrmals hin und her reflektiert wurde, konnte die Länge L des Lichtweges auf 22 Meter gebracht werden. Es wurde nun zuerst der Arm $O'P$ in Richtung der Erdbewegung gestellt und dann durch Drehung des Apparates um einen rechten Winkel der Arm $O'Q$ in diese Lage gebracht. Dabei wäre eine Verschiebung der Interferenzstreifen zu erwarten gewesen. In Bruchteilen der Wellenlänge des verwandten Natriumlichtes gemessen, beträgt die für die Verschiebung maßgebende doppelte Differenz der beiden Lichtwege

$$\frac{2\Delta L}{\lambda} = \frac{\beta^2 L}{\lambda} = \frac{10^{-8} \cdot 22 \cdot 10^2}{5{,}9 \cdot 10^{-5}} = 0{,}37. \tag{244d}$$

Die erhaltenen Verschiebungen der Interferenzstreifen aber waren kleiner als 0,02 des Streifenabstandes.

Das negative Ergebnis des Michelsonschen Interferenzversuches spricht gegen die Vorstellungen über die Lichtfortpflanzung im leeren Raume, die den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildeten, falls die bei der Ableitung von (244a, b) stillschweigend gemachte Voraussetzung zutrifft, daß die Abmessungen der festen Körper auf der bewegten Erde die gleichen sind, die sie auf der ruhenden Erde wären. Läßt man die Möglichkeit einer Dimensionsänderung infolge der Erdbewegung zu, so sind die Betrachtungen entsprechend abzuändern. In der Tat haben Fitzgerald und H. A. Lorentz das negative Ergebnis des Michelsonschen Versuches erklärt, indem sie zur Hypothese der Kontraktion der Materie infolge der Erdbewegung ihre Zuflucht nahmen: Es sollen die Körper infolge der Erdbewegung eine Kontraktion im Verhältnis $\varkappa$ parallel der Bewegungsrichtung erfahren, derart, daß die Punkte, die auf der ruhenden

Erde auf einer Kugel liegen würden, auf der bewegten Erde auf einem Heaviside-Ellipsoid liegen.

Daß durch diese Hypothese das negative Ergebnis des Michelsonschen Versuches ohne weiteres erklärt wird, folgt aus den oben abgeleiteten Beziehungen. Denn nach der Kontraktionshypothese liegen die Punkte P, die im Falle der Ruhe auf einer Kugel um O' lagen, im Falle der Bewegung auf einem Heaviside-Ellipsoide des Systemes Σ. Diesem entspricht nun, nach (242b), im System Σ' wiederum eine Kugel um O'. Folglich sind jetzt die in Σ' gemessenen Lichtwege $l_1' + l_2'$ die gleichen, welches auch die Richtung des Fahrstrahles $O'P$ sein mag; dann besagt (244), daß auch die entsprechenden absoluten Lichtwege die gleichen sind.

Nach der Fitzgerald-Lorentzschen Hypothese ist demnach ein positives Ergebnis des Interferenzversuches ausgeschlossen, nicht nur, was Größen zweiter Ordnung, sondern auch, was Größen beliebiger Ordnung anbelangt. Wird der Arm $O'Q$ statt $O'P$ beim Michelsonschen Versuch der Richtung der Erdbewegung parallel gestellt, so wird $O'Q$ im Verhältnis $\varkappa$ verkürzt, $O'P$ im Verhältnis $\varkappa^{-1}$ verlängert, und die hierdurch bedingte Veränderung der Lichtwege kompensiert gerade die infolge der Bewegung der Erde stattfindende, so daß keine Verschiebung der Interferenzstreifen zu erwarten ist.

Man könnte nun einwenden, daß die Dimensionsänderungen fester Körper, wenn sie auch sehr klein sind, der Messung zugänglich sein müßten. Das wäre aber nur dann möglich, wenn man die Abmessungen der Körper durch „absolut ruhende" Maßstäbe messen könnte. Wir sind aber auf solche Maßstäbe angewiesen, die sich mit der Erde bewegen; diese erfahren nach der Kontraktionshypothese bei der Bewegung der Erde dieselbe Längenänderung wie die zu messenden Körper; eine Kugel des irdischen Maßstabes ist der Kontraktionshypothese zufolge ein Heaviside-Elllipsoid des „absolut ruhenden" Maßstabes. Mit irdischen Maßstäben kann man diese Behauptung weder bestätigen noch widerlegen. Auch wenn man zur Längenmessung optische Methoden verwendet,

ist es selbstverständlich unmöglich, die behauptete Kontraktion der Materie festzustellen. Man würde dann die Länge eines Stabes durch den Lichtweg messen, während beim Michelsonschen Versuch der Lichtweg durch die Länge eines festen Stabes gemessen wird. Der Einfluß der Erdbewegung auf Lichtweg einerseits und Länge des Stabes andererseits kompensiert sich aber gerade so, daß sie auf der bewegten Erde gleich erscheinen, wenn sie auf der ruhenden gleich wären; eine optische oder elektrische Messung kann also niemals die behauptete Anisotropie der Körper auf der bewegten Erde feststellen.

Die zur Erklärung des Michelsonschen Versuches eingeführte Kontraktionshypothese erscheint zunächst bedenklich. H. A. Lorentz hat indessen versucht, sie plausibel zu machen, indem er von der Vorstellung ausging, daß die Molekularkräfte, welche die Form fester Körper bestimmen, elektrischer Natur sind. An jedem Moleküle des ruhenden Körpers halten sich, dieser Vorstellung zufolge, die von den übrigen Molekülen herrührenden elektrostatischen Kräfte das Gleichgewicht. Wird nun der Körper in eine gleichförmige Translationsbewegung versetzt, so werden die Molekularkräfte abgeändert, indem zu dem elektrischen Felde ein magnetisches tritt. Wie in § 18 dargelegt wurde, entspricht dem Gleichgewichte der elektrostatischen Kräfte im ruhenden Systeme ein Gleichgewicht der elektromagnetischen Kräfte in einem bewegten Systeme, welches aus jenem durch eine Kontraktion im Verhältnis $\varkappa$ parallel der Bewegungsrichtung hervorgeht. In dem bewegten kontrahierten Systeme würde also an jedem Moleküle Gleichgewicht der Molekularkräfte bestehen, wenn es in dem ruhenden Systeme bestand. Es erscheint die Annahme nicht ungerechtfertigt, daß das System der Moleküle, in Bewegung gesetzt, von selbst die neuen Gleichgewichtslagen annimmt; dann erfährt der Körper gerade die Lorentzsche Kontraktion.

Betrachtet man die Molekularkräfte in ruhenden Körpern als elektrostatische Kräfte, und läßt man die Wirkungen der regellosen Molekularbewegungen außer acht, so erscheint es

hiernach plausibel, daß ein fester Körper, in Bewegung gesetzt, sich der Bewegungsrichtung parallel im Verhältnis $\varkappa$ kontrahiert. Allerdings dürfen wir uns nicht verhehlen, daß wir noch weit davon entfernt sind, die Molekularkräfte in ruhenden Körpern auf Grund der elektrischen Auffassung befriedigend gedeutet zu haben.

§ 46. Die Ortszeit.

Wir wollen uns in diesem Paragraphen auf den Standpunkt der Kontraktionshypothese stellen. Dann verstehen wir, wie es kommt, daß bei der Messung des Lichtweges die durch die Bewegung des Systemes gegebene Vorzugsrichtung dem mitbewegten Beobachter entgeht. Es empfiehlt sich, mit den Koordinaten x', y', z' des Hilfssystemes Σ' zu rechnen, welches aus dem gegebenen materiellen System durch eine Streckung parallel der Bewegungsrichtung, im Verhältnis $1:\varkappa$, hervorgeht. Denn, wenn das System aus der Ruhe in den Zustand der Bewegung übergeht, werden die relativen X-Koordinaten gemäß der Kontraktionshypothese im Verhältnis $\varkappa:1$ kleiner; die zugehörigen x'-Koordinaten jedoch sind im Falle der Bewegung die gleichen wie im Falle der Ruhe. Mit den Koordinaten x', y', z' des Systemes Σ' und dem in diesem Systeme gemessenen Lichtwege l' stehen die auf räumlich feste Achsen bezogenen Koordinaten x, y, z und der absolute Lichtweg l in dem durch (243, 243c) bzw. durch (243a, b) formulierten Zusammenhange.

Einem mitbewegten Beobachter, der in dem Systeme Σ' seine Messungen vornimmt, scheint das Licht nach allen Seiten hin mit der gleichen Geschwindigkeit fortzuschreiten; wir wollen diese Geschwindigkeit mit c' bezeichnen und zulassen, daß sie von dem Betrage der Geschwindigkeit des bewegten Systemes abhänge, mithin von der durch ruhende Beobachter gemessenen Lichtgeschwindigkeit c verschieden sei. Da der Lichtweg jedesmal das Produkt der Lichtgeschwindigkeit und Lichtzeit ist, so kann Gl. (243) geschrieben werden:

$$\varkappa c t = c' t' + \beta x'. \tag{245}$$

Die Zeit t', d. h. den Quotienten aus Lichtweg l' und Lichtgeschwindigkeit c' im bewegten System Σ', nennt H. A. Lorentz die „Ortszeit". Diese Zeit ist es, nach der mitbewegte Beobachter ihre Uhren stellen, wenn sie sich zur Vergleichung des Ganges der Uhren elektrischer oder optischer Mittel bedienen. Dies kann etwa folgendermaßen geschehen.[46])

In den Punkten O' und A' des bewegten Systemes mögen sich zwei synchrone Uhren befinden. In dem Augenblick, wo die Uhr in O' die Zeit Null anzeigt, werde von O' aus ein Lichtzeichen gegeben; bei seinem Eintreffen in A' soll der Zeiger der dortigen Uhr auf diejenige Zeit eingestellt werden, die sich als Quotient aus dem mit einem mitbewegten Maßstabe gemessenen Lichtwege $O'A'$ und der im bewegten Systeme Σ' gemessenen Lichtgeschwindigkeit c' ergiebt. Die so gestellte Uhr zeigt die Ortszeit t' des Punktes A' an. Ihren Zusammenhang mit der „allgemeinen" d. h. der von ruhenden Beobachtern festgestellten Lichtzeit t gibt (245) an; dabei ist x' die Projektion des Lichtweges $O'A'$ auf die Bewegungsrichtung des Systemes.

Wir wollen annehmen, daß wie $\varkappa$ so auch der Quotient $c':c$ nur um Größen zweiter Ordnung in β von eins verschieden sei. Dann wird (245) bei Vernachlässigung von Größen zweiter Ordnung

(245a) $$t = t' + \frac{\beta x'}{c}.$$

Es geht also in einem Punkte A' des bewegten Systemes die auf Ortszeit gestellte Uhr nach oder vor gegen die allgemeine Zeit, je nachdem die x'-Koordinate des Punktes A' positiv oder negativ ist; dabei ist die Identität der allgemeinen Zeit t und der Ortszeit t' im Koordinatenursprung O' willkürlich festgesetzt worden. Der Gangunterschied $\frac{\beta x'}{c}$ zweier nach Ortszeit t' bzw. nach allgemeiner Zeit t gestellter Uhren erfährt einen entsprechenden Zuwachs, wenn man, durch ein Lichtzeichen von A' aus, in der oben erläuterten Weise eine in B' befindliche Uhr reguliert; dieser Zuwachs ist jeweils

proportional der Projektion des im Systeme Σ' zurückgelegten Lichtweges auf die Bewegungsrichtung des Systemes. Wenn man, unter Einschaltung einer Reihe von Stationen, eine Uhr im bewegten Systeme durch Lichtzeichen einstellt, so gelangt man zu derselben Zeigerstellung, als wenn es durch direkte Zeichen von O' aus geschehen wäre. Die Ortszeit ist demnach in der Tat nur eine Ortsfunktion im bewegten Systeme.

Wir sind jetzt imstande, zu beurteilen, unter welchen Umständen die Beobachtung einen Einfluß der Erdbewegung auf die Lichtzeit und damit auf die Lichtgeschwindigkeit entdecken könnte. Es kommt offenbar darauf an, durch welche Mittel die Stellung der Zahnräder, Spiegel oder sonstigen Vorrichtungen reguliert wird, deren man sich zur Messung der Lichtzeit bedient. Geschieht die Regulierung auf elektrischem oder optischem Wege, so kommt es auf dasselbe heraus, als wenn die Lichtzeit durch die Differenz der Ortszeiten des Empfängers und Senders gemessen wird. Dann ist es, nach der Definition der Ortszeit, selbstverständlich, daß die gemessene Lichtzeit und daher auch die Lichtgeschwindigkeit unabhängig von der Richtung des Strahles gegen die Bewegung der Erde wird. Um einen Unterschied der Geschwindigkeit zweier, parallel bzw. entgegen der Bewegung der Erde gerichteter Strahlen festzustellen, bedürfte es einer mechanischen Regulierung der Zahnräder oder rotierenden Spiegel, wobei Fehler gleich dem Bruchteil 10^{-4} der Lichtzeit vermieden sein müßten. Eine so genaue mechanische Regulierung würde, wenn sie überhaupt theoretisch als möglich angesehen wird, doch praktisch nicht durchführbar sein. So spricht es denn keineswegs gegen die Grundannahmen der hier entwickelten Theorie, wenn ein derartiger Einfluß der Erdbewegung nicht entdeckt worden ist. Dabei kommt, da es sich hier nur um Größen erster Ordnung in β handelt, die Hypothese der Kontraktion bewegter Körper zunächst nicht ins Spiel.

Das ist erst dann der Fall, wenn Größen zweiter und höherer Ordnung in β berücksichtigt werden und dementsprechend die Ortszeit t' durch (245) definiert wird. Trifft

die Kontraktionshypothese zu, so ist auch jetzt noch eine jede elektrische oder optische Regulierung einer Messung der Zeit durch die Differenz der Ortszeiten äquivalent. Dann bleibt einem mitbewegten Beobachter, selbst wenn er Größen zweiter oder höherer Ordnung messen kann, die durch die Erdbewegung bedingte Vorzugsrichtung verborgen, wenn er mit dem Lichte irdischer Lichtquellen Lichtzeiten oder Lichtgeschwindigkeiten bestimmt.

Wir denken uns jetzt die Dauer irgendeines Vorganges das eine Mal in allgemeiner Zeit t gemessen, das andere Mal in der Skala der Ortszeit t'. Aus (245) folgt

$$\varkappa c \Delta t = c' \Delta t'; \tag{246}$$

dabei ist Δt das mit der ruhenden Uhr gemessene Zeitintervall, $\Delta t'$ das entsprechende Zeitintervall, gemessen in der Ortszeitskala an einem bestimmten Punkt des bewegten Systemes.

Man ist also gezwungen, wenn man für die Lichtfortpflanzung im Raume die hier zugrunde gelegten Annahmen macht, entweder die Lichtgeschwindigkeit c', gemessen im bewegten Systeme Σ', als verschieden von der Lichtgeschwindigkeit c in einem ruhenden Systeme anzunehmen, oder einen Unterschied in der Zeitdauer eines Vorganges, wenn sie das eine Mal auf die Skala der allgemeinen Zeit, das andere Mal auf die Ortszeitskala eines mit dem Systeme bewegten Beobachters bezogen wird, zuzulassen.

A. Einstein[11]) stellt die Forderung auf, daß die Lichtgeschwindigkeit denselben Wert haben soll, sei es, daß sie im ruhenden oder im bewegten Systeme gemessen wird:

$$c' = c.$$

Diese Forderung führt ihn dazu, zu verlangen, daß die Dauer irgendeines, etwa periodischen Vorganges eine verschiedene sei, je nachdem sie in der Skala der allgemeinen Zeit oder in der Skala der Ortszeit eines bewegten Beobachters gemessen wird:

$$T' = T\sqrt{1-\beta^2}. \tag{246a}$$

Würde es eine Uhr geben, welche, aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung versetzt, ihren Gang nicht änderte, so würde es hiernach prinzipiell als möglich erscheinen, jene Veränderung der Skala der durch Lichtzeichen regulierten Zeit festzustellen und damit einen Einfluß zweiter Ordnung der Bewegung eines Systemes zu erhalten. Anders, wenn die Geschwindigkeit, mit welcher der Zeiger der Uhr vorrückt, durch die Bewegung gerade in dem Verhältnis $\varkappa$ verringert wird; dann mißt sie im Falle der Ruhe die Zeitintervalle in allgemeiner Zeit; dagegen in ein bewegtes System eingefügt, mißt sie die Zeitintervalle in der Ortszeitskala. Eine solche Uhr würde nicht dazu dienen können, einem mitbewegten Beobachter die Bewegung des Systemes anzuzeigen. Indem nun Einstein zu dem obigen Postulate der „Konstanz der Lichtgeschwindigkeit" noch das Postulat der „Relativität" hinzunimmt, welches eine Feststellung der gleichförmigen Translationsbewegung eines abgeschlossenen Systemes durch mitbewegte Beobachter ausschließt, gelangt er zu der Forderung, daß eine Uhr — und jeder periodische Vorgang kann als Uhr betrachtet werden — ihren Gang infolge der Bewegung in dem durch (246a) gegebenen Verhältnis $\varkappa$ verlangsamt.

Diese Forderung führt, wie Einstein selbst bemerkt, zu höchst sonderbaren Konsequenzen. So würde von zwei sonst gleich beschaffenen Unruhuhren, von denen die eine am Äquator, die andere an einem der Pole der Erde sich befindet, die erste infolge der Umfangsgeschwindigkeit der Erde um einen kleinen Betrag langsamer laufen als die zweite; der Gangunterschied würde nach Verlauf einer Zeit T betragen:

$$T - T' = T\,\{1 - \sqrt{1-\beta^2}\} = \tfrac{1}{2}\beta^2 T,$$

bei Vernachlässigung von Größen der Ordnung β^4. Ebendasselbe würde stattfinden, wenn die eine Uhr in einem Punkte A ruhen, die andere, im Falle der Ruhe mit ihr synchrone, nach Durchlaufung eines geschlossenen Weges, wieder in A anlangen würde.

Diese Konsequenzen erscheinen, obwohl die Gangunterschiede unter der Grenze der Meßbarkeit liegen, als nicht an-

nehmbar; sie machen es notwendig, die Einsteinsche Zeitdefinition abzulehnen. Wir stellen ihr die Forderung entgegen, daß die Dauer irgendeines Vorganges die gleiche sei, ob sie nun in der Skala der allgemeinen Zeit oder in der Ortszeitskala gemessen wird. Dann müssen wir allerdings das Postulat der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit fallen lassen; denn dann folgt aus (246):

$$c' = c\sqrt{1-\beta^2}. \tag{246b}$$

Die Lichtgeschwindigkeit, gemessen auf der Erde mit dem Lichte irdischer Lichtquellen, wäre hiernach infolge der Bewegung der Erde im Sonnensystem etwas kleiner als die astronomisch gemessene Lichtgeschwindigkeit, und zwar um

$$c - c' = c\left\{1 - \sqrt{1-\beta^2}\right\} = \tfrac{1}{2}\beta^2 c.$$

Diese Abweichung liegt ebenfalls innerhalb der Grenze der Fehler der Beobachtung.

Ein Einfluß der Bewegung des Systemes auf den Gang einer Uhr würde nach dieser Auffassung nicht anzunehmen sein. Vielmehr würde das Postulat der Relativität auf Grund von (246b) gerade die Unabhängigkeit des Ganges einer Uhr von ihrer Bewegung verlangen. Es bezieht sich überhaupt, wie aus den Entwickelungen der folgenden Paragraphen noch deutlicher hervorgehen wird, das sogenannte „Theorem der Relativität“ keineswegs auf Zeiten, sondern auf Längen, d. h. auf Produkte aus Geschwindigkeiten und Zeiten. So können denn auch die beiden soeben dargelegten Auffassungen zusammengefaßt werden in der Formel:

$$c'T' = cT\sqrt{1-\beta^2}. \tag{246c}$$

§ 47. Die Lorentzsche Transformation.

Wir verstehen unter x, y, z, l Koordinaten und Lichtweg, bezogen auf ein im Raume festes Achsensystem. Diesem ursprünglich gegebenen Systeme Σ von vier Größen wurde durch die Gleichungen (243a, b) ein anderes System Σ' von vier Größen x', y', z', l' zugeordnet:

$$\varkappa l' = l - \beta x, \quad \varkappa x' = x - \beta l, \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{247}$$

Diese Größen haben, für einen Körper, welcher in Richtung der x-Achse mit der Geschwindigkeit $c\beta$ bewegt wird, die Bedeutung von Koordinaten und Lichtweg, bezogen auf mitbewegte Achsen, aber nicht in dem bewegten materiellen Körper selbst gemessen, sondern in dem Hilfskörper, welcher durch eine Streckung parallel der x-Achse, im Verhältnis

$$1 : \varkappa = 1 : \sqrt{1-\beta^2},$$

aus ihm entsteht. Durch x', y', z', l' drücken sich, gemäß (247), die ursprünglich gegebenen Größen folgendermaßen aus:

$$(247\text{a})\quad \varkappa l = l' + \beta x', \quad \varkappa x = x' + \beta l', \quad y = y', \quad z = z'.$$

Die durch (247), bzw. durch (247a) gegebene Transformation der Koordinaten und des Lichtweges nennen wir mit H. Poincaré[47]) eine „Lorentzsche Transformation". Wir beschränken uns auf den Fall $\beta < 1$, da für $\beta > 1$ die Transformation zu imaginären Werten führen würde.

Aus (247) folgt, wenn wir x, y, z, l als Unabhängige betrachten:

$$(247\text{b})\quad \frac{\partial l'}{\partial l} = \frac{1}{\varkappa}, \quad \frac{\partial l'}{\partial x} = -\frac{\beta}{\varkappa}, \quad \frac{\partial x'}{\partial l} = -\frac{\beta}{\varkappa}, \quad \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{1}{\varkappa}.$$

Entsprechend folgt aus (247a), wenn x', y', z', l' Unabhängige sind:

$$(247\text{c})\quad \frac{\partial l}{\partial l'} = \frac{1}{\varkappa}, \quad \frac{\partial l}{\partial x'} = \frac{\beta}{\varkappa}, \quad \frac{\partial x}{\partial l'} = \frac{\beta}{\varkappa}, \quad \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{1}{\varkappa}.$$

Aus jedem dieser Gleichungssysteme kann man schließen, daß die Determinante der Lorentzschen Transformation gleich 1 ist.

Wir denken uns jetzt einen — materiellen oder elektrischen — Punkt, der sich in vorgegebener Weise bewegt. In dem ursprünglichen Systeme Σ wird seine Bewegung dargestellt, indem seine Koordinaten x, y, z als Funktionen der Zeit t und damit des vom Lichte in der Zeit t zurückgelegten Weges $ct = l$ angegeben werden:

$$(248)\qquad x = x(l), \quad y = y(l), \quad z = z(l).$$

Ist $\mathfrak{v}$ der Geschwindigkeitsvektor des Punktes, so werden die Geschwindigkeitskomponenten, wenn man sie auf die Lichtgeschwindigkeit als Einheit bezieht:

$$(248\text{a})\quad \mathfrak{q}_x = \frac{\mathfrak{v}_x}{c} = \frac{dx}{dl}, \quad \mathfrak{q}_y = \frac{\mathfrak{v}_y}{c} = \frac{dy}{dl}, \quad \mathfrak{q}_z = \frac{\mathfrak{v}_z}{c} = \frac{dz}{dl}.$$

Man gehe nun zu dem transformierten Systeme Σ' über; die durch

$$(249)\qquad x' = x'(l'), \quad y' = y'(l'), \quad z' = z'(l')$$

gegebene Bewegung in Σ' mag der durch (248) gegebenen Bewegung in Σ entsprechen, mithin die Geschwindigkeitskomponenten in Σ', bezogen auf die Lichtgeschwindigkeit c' in Σ' als Einheit:

$$(249\text{a})\quad \mathfrak{q}'_x = \frac{\mathfrak{v}'_x}{c'} = \frac{dx'}{dl'}, \quad \mathfrak{q}'_y = \frac{\mathfrak{v}'_y}{c'} = \frac{dy'}{dl'}, \quad \mathfrak{q}'_z = \frac{\mathfrak{v}'_z}{c'} = \frac{dz'}{dl'}$$

den durch (248a) gegebenen Geschwindigkeitskomponenten in Σ. Es ist die Aufgabe, die Regeln festzustellen, nach denen die Geschwindigkeiten in Σ und Σ' vermöge der Lorentzschen Transformation einander zuzuordnen sind.

Aus (247) folgt, wenn, gemäß (248), x als Funktion von l betrachtet wird:

$$(250)\qquad \varkappa \frac{dl'}{dl} = 1 - \beta \frac{dx}{dl} = 1 - \beta \mathfrak{q}_x,$$

$$\varkappa \frac{dx'}{dl} = \frac{dx}{dl} - \beta = \mathfrak{q}_x - \beta.$$

Durch Division der beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$(250\text{a})\qquad \mathfrak{q}'_x = \frac{dx'}{dl'} = \frac{\mathfrak{q}_x - \beta}{1 - \beta \mathfrak{q}_x}.$$

In entsprechender Weise erhält man für die y-Komponente von $\mathfrak{q}'$

$$\mathfrak{q}'_y = \frac{dy'}{dl'} = \frac{dy}{dl}\frac{dl}{dl'} = \mathfrak{q}_y \frac{dl}{dl'}$$

aus Gl. (250) den Ausdruck

$$(250\text{b})\qquad \mathfrak{q}'_y = \frac{\varkappa \mathfrak{q}_y}{1 - \beta \mathfrak{q}_x},$$

und für die z-Komponente

$$\mathfrak{q}'_z = \frac{\varkappa \mathfrak{q}_z}{1 - \beta \mathfrak{q}_x}. \tag{250c}$$

Durch eine leichte Rechnung leitet man aus (250a, b, c) für den Betrag von $\mathfrak{q}'$ die Formel ab:

$$1 - |\mathfrak{q}'|^2 = \frac{(1 - \beta^2)(1 - |\mathfrak{q}|^2)}{(1 - \beta \mathfrak{q}_x)^2}. \tag{250d}$$

Ein Punkt, der sich in Σ mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, bewegt sich auch in Σ' mit Lichtgeschwindigkeit; denn $|\mathfrak{v}| = c$, $|\mathfrak{q}| = 1$ entspricht nach (250d) $\mathfrak{q}' = 1$, $|\mathfrak{v}'| = c'$. Ebenso ersieht man, da $\beta^2 < 1$, ohne weiteres aus dieser Formel: Unterlichtgeschwindigkeit in Σ entspricht Unterlichtgeschwindigkeit in Σ', Überlichtgeschwindigkeit in Σ entspricht Überlichtgeschwindigkeit in Σ'.

Aus den Gleichungen (250a bis d), denen gemäß sich die Komponenten und der Betrag von $\mathfrak{q}'$ durch die Komponenten von $\mathfrak{q}$ ausdrücken, erhält man die Formeln, nach denen sich umgekehrt $\mathfrak{q}'$ in $\mathfrak{q}$ transformiert:

$$\mathfrak{q}_x = \frac{\mathfrak{q}'_x + \beta}{1 + \beta \mathfrak{q}'_x}, \tag{251a}$$

$$\mathfrak{q}_y = \frac{\varkappa \mathfrak{q}'_y}{1 + \beta \mathfrak{q}'_x}, \tag{251b}$$

$$\mathfrak{q}_z = \frac{\varkappa \mathfrak{q}'_z}{1 + \beta \mathfrak{q}'_x}, \tag{251c}$$

$$1 - |\mathfrak{q}|^2 = \frac{(1 - \beta^2)(1 - |\mathfrak{q}'|^2)}{(1 + \beta \mathfrak{q}'_x)^2}. \tag{251d}$$

Wir machen, bevor wir weitergehen, von den obigen Transformationsformeln eine Anwendung auf die folgende Frage: In einem materiellen Systeme (etwa dem Planetensysteme) soll eine Uhr (man mag dabei an einen umlaufenden Jupitermond denken) ihren Ort ändern. Dem Systeme und der Uhr werde ferner eine gemeinsame Translationsbewegung im Raume gegeben. Wird ein mitbewegter Beobachter diese Bewegung des Systemes durch Beobachtung jener relativ zu ihm bewegten Uhr feststellen können? Wir werden sehen, daß er sie nicht

feststellen kann, falls die Lorentzsche Kontraktionshypothese zutrifft, und falls der Gang einer im bewegten Systeme festen Uhr durch die Bewegung in dem Verhältnis (246c) abgeändert wird, wie wir am Schlusse des vorigen Paragraphen forderten.

Wir betrachten zunächst das durch den Weltenraum bewegte System; der in ihm feste Beobachter bewegt sich mit der Geschwindigkeit $c\beta$ parallel der x-Achse, die Uhr mit der Geschwindigkeit $c\mathfrak{q}$ in beliebiger Richtung. T sei die Zeit eines Zeigerumlaufes (Mondumlaufes), welche ein mit der Uhr (dem Jupiter) bewegter Beobachter wahrnehmen würde, gemessen in der „allgemeinen" Zeitskala. Unser Beobachter, der sich mit einer anderen Geschwindigkeit bewegt, nimmt jedoch eine andere „allgemeine" Zeit des Umlaufs T^* wahr. Diese bestimmt sich aus dem Dopplerschen Prinzip; dabei ist die Formel (75c) des § 14 anzuwenden, welche sich auf den allgemeinen Fall bezieht, wo sowohl die Lichtquelle wie der Beobachter sich bewegt. Sie ergibt, bei entsprechend geänderter Bezeichnung:

$$T^* = T \cdot \frac{l - \mathfrak{q}\mathfrak{r}}{l - \beta x}. \tag{252}$$

Der Kontraktionshypothese zufolge ist das Körpersystem Σ infolge seiner Bewegung parallel der Bewegungsrichtung im Verhältnis $\varkappa : 1$ kontrahiert. Geht man nun mit Hilfe der Lorentzschen Transformation zum System Σ' über, so bedeutet dies eine Streckung parallel der Bewegungsrichtung, im Verhältnis $1 : \varkappa$. Hierdurch gelangt man zu derjenigen Konfiguration zurück, welche dem Systeme bei fehlender Translationsbewegung im Weltenraume zukommen würde. Das System Σ' ist also mit dem materiellen Systeme im Falle der Ruhe identisch.

Im Systeme Σ' ruht nun der Beobachter, während die Uhr sich mit der Geschwindigkeit $c'\mathfrak{q}'$ bewegt. Hier ergibt die Anwendung des Dopplerschen Prinzips:

$$T^{*\prime} = T' \frac{l' - \mathfrak{q}'\mathfrak{r}'}{l'}. \tag{252a}$$

Dabei ist T' die Umlaufszeit des Zeigers der bewegten Uhr,

bezogen auf deren Ortszeitskala, $T^{*\prime}$ die vom Beobachter wahrgenommene Umlaufszeit, gemessen in seiner Ortszeitskala.

Durch Division von (252a) und (252) folgt, mit Rücksicht auf den in (247) angegebenen Ausdruck von l':

$$\frac{T^{*\prime}}{T^{*}} = \frac{\varkappa T'}{T} \cdot \frac{l' - \mathfrak{q}'\mathfrak{r}'}{l - \mathfrak{q}\mathfrak{r}}. \tag{252b}$$

Aus (247) und (250a, b, c) leitet man die Formel ab:

$$l' - \mathfrak{q}'\mathfrak{r}' = \frac{\varkappa(l - \mathfrak{q}\mathfrak{r})}{1 - \beta\mathfrak{q}_x},$$

mit deren Hilfe (252b) übergeht in:

$$\frac{T^{*\prime}}{T^{*}} = \frac{T'}{T} \cdot \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta\mathfrak{q}_x}. \tag{252c}$$

Unter T' und T haben wir ein bestimmtes Zeitintervall verstanden — die Dauer eines Umlaufes des Zeigers der bewegten Uhr (des Jupitermondes), beobachtet von einem mit der Uhr (dem Jupiter) bewegten Punkte aus — welches wir das eine Mal auf die Ortszeitskala der bewegten Uhr, das andere Mal auf die Skala der allgemeinen Zeit bezogen haben. Das Verhältnis $T' : T$ ist daher identisch mit dem durch (250) bestimmten Verhältnis zweier einander entsprechender Zeitelemente in Σ' und Σ:

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{c}{c'}\frac{dl'}{dl} = \frac{c}{c'}\frac{1 - \beta\mathfrak{q}_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Aus

$$\frac{T'}{T} = \frac{c}{c'}\frac{1 - \beta\mathfrak{q}_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{252d}$$

folgt aber gemäß (252c) das Verhältnis der vom Beobachter wahrgenommenen Umlaufszeiten, das eine Mal in der Skala des Systemes Σ', das andere Mal in der allgemeinen Zeitskala des Systemes Σ gemessen:

$$\frac{T^{*\prime}}{T^{*}} = \frac{c}{c'}\sqrt{1 - \beta^2}. \tag{252e}$$

Wie am Schlusse des vorigen Paragraphen dargelegt wurde, ist dies das Verhältnis, nachdem sich die Dauer irgendeines

periodischen Vorganges ändert, wenn man ihn zuerst in der Skala der allgemeinen Zeit und sodann in der Ortszeitskala eines mit der Geschwindigkeit β parallel der x-Achse bewegten Beobachters mißt. Es ist dies ferner, wie wir gemäß dem Postulate der Relativität in (246c) forderten, die Änderung der Umlaufsgeschwindigkeit des Zeigers einer Uhr, welche aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung versetzt wird. Nach der Annahme von Einstein ($c' = c$) stimmt das Verhältnis (252e) mit (246a) überein, während es nach unserer Auffassung gemäß (246b) gleich eins wird. Welche von beiden Auffassungen man auch bevorzugt, der Einfluß der Bewegung des ganzen Systemes entzieht sich der Beobachtung, da der mit dem Systeme bewegte Beobachter mit seiner Uhr dieselbe Umlaufszeit des Zeigers der relativ zu ihm bewegten Uhr feststellt, als wenn das ganze System im Raum ruhte.

Wir gehen jetzt zur Transformation des Beschleunigungsvektors über. Wir setzen

$$\dot{\mathfrak{q}} = \frac{d\mathfrak{q}}{dl} = \frac{1}{c^2}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}, \tag{253}$$

$$\dot{\mathfrak{q}}' = \frac{d\mathfrak{q}'}{dl'} = \frac{1}{c'^2}\frac{d\mathfrak{v}'}{dt'}, \tag{253a}$$

und erhalten durch Differentiation von (250a)

$$\dot{\mathfrak{q}}_x' = \frac{dl}{dl'}\frac{d}{dl}\left\{\frac{\mathfrak{q}_x - \beta}{1 - \beta\mathfrak{q}_x}\right\},$$

und hieraus, mit Rücksicht auf (250)

$$\dot{\mathfrak{q}}_x' = \frac{\varkappa}{1 - \beta\mathfrak{q}_x}\left\{\frac{\dot{\mathfrak{q}}_x}{1 - \beta\mathfrak{q}_x} + \frac{\beta\dot{\mathfrak{q}}_x(\mathfrak{q}_x - \beta)}{(1 - \beta\mathfrak{q}_x)^2}\right\},$$

mithin

$$\dot{\mathfrak{q}}_x' = \frac{\dot{\mathfrak{q}}_x\varkappa^3}{(1 - \beta\mathfrak{q}_x)^3}, \tag{253b}$$

oder

$$\dot{\mathfrak{q}}_x' = \frac{\dot{\mathfrak{q}}_x\varkappa^3}{(1 - \beta\mathfrak{q}_x)^2} + \frac{\mathfrak{q}_x\beta\dot{\mathfrak{q}}_x\varkappa^3}{(1 - \beta\mathfrak{q}_x)^3}. \tag{253c}$$

Ähnlich erhalten wir aus (250b) durch Differentiation

$$\dot{\mathfrak{q}}_y' = \frac{dl}{dl'}\frac{d}{dl}\left\{\frac{\varkappa\mathfrak{q}_y}{1 - \beta\mathfrak{q}_x}\right\} = \frac{\varkappa}{1 - \beta\mathfrak{q}_x}\frac{d}{dl}\left\{\frac{\varkappa\mathfrak{q}_y}{1 - \beta\mathfrak{q}_x}\right\}$$

folglich

(253d) $$\dot{\mathfrak{q}}'_y = \frac{\dot{\mathfrak{q}}_y \varkappa^2}{(1-\beta\mathfrak{q}_x)^2} + \frac{\mathfrak{q}_y \beta \dot{\mathfrak{q}}_x \varkappa^2}{(1-\beta\mathfrak{q}_x)^3},$$

und entsprechend für die z-Komponente

(253e) $$\dot{\mathfrak{q}}'_z = \frac{\dot{\mathfrak{q}}_z \varkappa^2}{(1-\beta\mathfrak{q}_x)^2} + \frac{\mathfrak{q}_z \beta \dot{\mathfrak{q}}_x \varkappa^2}{(1-\beta\mathfrak{q}_x)^3}.$$

Die Formeln (253c, d, e) können wir noch einfacher schreiben, wenn wir zur Abkürzung den Vektor einführen

(254) $$\dot{\mathfrak{p}} = \frac{\dot{\mathfrak{q}} \varkappa^3}{(1-\beta\mathfrak{q}_x)^2} + \frac{\mathfrak{q} \beta \dot{\mathfrak{q}}_x \varkappa^3}{(1-\beta\mathfrak{q}_x)^3};$$

dann lauten sie nämlich

(254a) $$\dot{\mathfrak{q}}'_x = \dot{\mathfrak{p}}_x, \quad \varkappa\dot{\mathfrak{q}}'_y = \dot{\mathfrak{p}}_y, \quad \varkappa\dot{\mathfrak{q}}'_z = \dot{\mathfrak{p}}_z.$$

Betrachten wir insbesondere einen — materiellen oder elektrischen — Punkt, der sich gerade mit der Geschwindigkeit des Systemes bewegt, aber nicht mit konstanter, sondern mit variabler Geschwindigkeit. Die Regeln, nach denen die Beschleunigungskomponenten aus dem System Σ in das System Σ' umzurechnen sind, gehen aus (253b, d, e) hervor, indem gesetzt wird

$$\mathfrak{q}_x = \beta, \quad \mathfrak{q}_y = 0, \quad \mathfrak{q}_z = 0;$$

dann folgt:

(255) $$\dot{\mathfrak{q}}'_x = \dot{\mathfrak{q}}_x \varkappa^{-3}, \quad \dot{\mathfrak{q}}'_y = \dot{\mathfrak{q}}_y \varkappa^{-2}, \quad \dot{\mathfrak{q}}'_z = \dot{\mathfrak{q}}_z \varkappa^{-2}.$$

Diese Ergebnisse werden weiterhin von Nutzen sein.

§ 48. Das Theorem der Relativität.

Die im vorigen Paragraphen erörterte Lorentzsche Transformation steht, wie wir gesehen haben, in enger Beziehung zu den Gesetzen der Lichtfortpflanzung im Raume. Da diese Gesetze, der Theorie der elektromagnetischen Strahlung zufolge, sich aus den Feldgleichungen der Maxwellschen Theorie ableiten, so kann man erwarten, die Lorentzsche Transformation mit diesen Feldgleichungen verknüpft zu finden. In der Tat ist H. A. Lorentz[32]) von den Feldgleichungen seiner Theorie

aus zu jener Transformation und zu dem nunmehr abzuleitenden „Theorem der Relativität“ gelangt. Von den Autoren, die, dem von Lorentz eingeschlagenen Wege folgend, das Fehlen eines merklichen Einflusses der Erdbewegung mit diesem Theorem in Verbindung gebracht haben, sind H. Poincaré[47]), A. Einstein[11]), M. Planck[45]) und H. Minkowski[38]) zu nennen. Wir verstehen, indem wir uns der Schreibweise des § 28 bedienen, unter $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{h}$ die elektromagnetischen Vektoren, die in den ursprünglichen Feldgleichungen der Elektronentheorie auftreten; diese lauten, wenn man $ct = l$, $\mathfrak{v} = c\mathfrak{q}$ setzt:

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{h} - \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial l} = 4\pi\varrho\mathfrak{q},$$

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{e} + \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial l} = 0,$$

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{e} = 4\pi\varrho,$$

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{h} = 0.$$

Welche Form nehmen diese Feldgleichungen an, wenn man, statt der Unabhängigen x, y, z, l durch die Lorentzsche Transformation (247) die neuen Unabhängigen x', y', z', l' einführt?

Wir transformieren zunächst die 4 partiellen Differentialgleichungen (III) und (I), indem wir die Regeln (247 b) beachten; sie ergeben dann:

$$\frac{\partial \mathfrak{e}_x}{\partial x'}\frac{1}{\varkappa} - \frac{\partial \mathfrak{e}_x}{\partial l'}\frac{\beta}{\varkappa} + \frac{\partial \mathfrak{e}_y}{\partial y'} + \frac{\partial \mathfrak{e}_z}{\partial z'} = 4\pi\varrho,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}_z}{\partial y'} - \frac{\partial \mathfrak{h}_y}{\partial z'} - \frac{\partial \mathfrak{e}_x}{\partial l'}\frac{1}{\varkappa} + \frac{\partial \mathfrak{e}_x}{\partial x'}\frac{\beta}{\varkappa} = 4\pi\varrho\mathfrak{q}_x,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}_x}{\partial z'} - \frac{\partial \mathfrak{h}_z}{\partial x'}\frac{1}{\varkappa} + \frac{\partial \mathfrak{h}_z}{\partial l'}\frac{\beta}{\varkappa} - \frac{\partial \mathfrak{e}_y}{\partial l'}\frac{1}{\varkappa} + \frac{\partial \mathfrak{e}_y}{\partial x'}\frac{\beta}{\varkappa} = 4\pi\varrho\mathfrak{q}_y,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}_y}{\partial x'}\frac{1}{\varkappa} - \frac{\partial \mathfrak{h}_y}{\partial l'}\frac{\beta}{\varkappa} - \frac{\partial \mathfrak{h}_x}{\partial y'} - \frac{\partial \mathfrak{e}_z}{\partial l'}\frac{1}{\varkappa} + \frac{\partial \mathfrak{e}_z}{\partial x'}\frac{\beta}{\varkappa} = 4\pi\varrho\mathfrak{q}_z.$$

Man setze nun:

$$\text{(256)} \qquad \begin{aligned} &\mathfrak{e}_x' = \mathfrak{e}_x, \quad \varkappa\mathfrak{e}_y' = \mathfrak{e}_y - \beta\mathfrak{h}_z, \quad \varkappa\mathfrak{e}_z' = \mathfrak{e}_z + \beta\mathfrak{h}_y; \\ &\mathfrak{h}_x' = \mathfrak{h}_x, \quad \varkappa\mathfrak{h}_y' = \mathfrak{h}_y + \beta\mathfrak{e}_z, \quad \varkappa\mathfrak{h}_z' = \mathfrak{h}_z - \beta\mathfrak{e}_y. \end{aligned}$$

Dann erhält man aus den ersten beiden jener Differential-

gleichungen, indem man die eine, mit $-\beta$ multipliziert, zur anderen addiert:

$$\varkappa\left\{\frac{\partial \mathfrak{e}'_x}{\partial x'} + \frac{\partial \mathfrak{e}'_y}{\partial y'} + \frac{\partial \mathfrak{e}'_z}{\partial z'}\right\} = 4\pi\varrho(1-\beta\mathfrak{q}_x),$$

$$\varkappa\left\{\frac{\partial \mathfrak{h}'_z}{\partial y'} - \frac{\partial \mathfrak{h}'_y}{\partial z'} - \frac{\partial \mathfrak{e}'_x}{\partial l'}\right\} = 4\pi\varrho(\mathfrak{q}_x-\beta),$$

während die beiden letzten Differentialgleichungen sich schreiben:

$$\frac{\partial \mathfrak{h}'_x}{\partial z'} - \frac{\partial \mathfrak{h}'_z}{\partial x'} - \frac{\partial \mathfrak{e}'_y}{\partial l'} = 4\pi\varrho\mathfrak{q}_y,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}'_y}{\partial x'} - \frac{\partial \mathfrak{h}'_x}{\partial y'} - \frac{\partial \mathfrak{e}'_z}{\partial l'} = 4\pi\varrho\mathfrak{q}_z.$$

Transformiert man ferner die Dichte der Elektrizität gemäß der Festsetzung

(257) $$\varkappa\varrho' = \varrho(1-\beta\mathfrak{q}_x),$$

und dementsprechend die Dichte des Konvektionsstromes, mit Rücksicht auf (250a, b, c), folgendermaßen:

(257a) $$\varkappa\varrho'\mathfrak{q}'_x = \varrho(\mathfrak{q}_x-\beta),$$

(257b) $$\varrho'\mathfrak{q}'_y = \varrho\mathfrak{q}_y, \quad \varrho'\mathfrak{q}'_z = \varrho\mathfrak{q}_z,$$

so lautet das System der transformierten Feldgleichungen (I) und (III) in leicht verständlicher Symbolik:

(III') $$\operatorname{div}'\mathfrak{e}' = 4\pi\varrho',$$

(I') $$\operatorname{curl}'\mathfrak{h}' - \frac{\partial \mathfrak{e}'}{\partial l'} = 4\pi\varrho'\mathfrak{q}'.$$

Aus (III) und (I) gehen (IV) und (II) hervor, indem man $\mathfrak{h}$ statt $\mathfrak{e}$, $-\mathfrak{e}$ statt $\mathfrak{h}$ schreibt und ϱ gleich Null setzt. Da die Formeln (256) hierbei ungeändert bleiben, wofern zugleich $\mathfrak{h}'$ an Stelle von $\mathfrak{e}'$, $-\mathfrak{e}'$ an Stelle von $\mathfrak{h}'$ tritt, so lauten offenbar die transformierten Feldgleichungen (IV) und (II):

(IV') $$\operatorname{div}'\mathfrak{h}' = 0,$$

(II') $$\operatorname{curl}'\mathfrak{e}' + \frac{\partial \mathfrak{h}'}{\partial l'} = 0.$$

Es entsprechen also die auf das System Σ' transformierten Feldgleichungen durchaus den Feldgleichungen des ursprüng-

lichen Systemes Σ, falls die Dichte der Elektrizität gemäß (257), und falls die Feldstärken gemäß (256) transformiert werden.

Wir wollen zunächst auf die Bedeutung der Relation (257) genauer eingehen. Die Vergleichung mit (250) ergibt für das Verhältnis der elektrischen Dichten in einander entsprechenden Punkten von Σ und Σ':

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{dl'}{dl}. \tag{258}$$

Andererseits ist aus dem im vorigen Paragraphen bereits erwähnten Umstande, daß die Funktionaldeterminante der Lorentzschen Transformation gleich 1 ist:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial l'}{\partial l} & \frac{\partial l'}{\partial x} & \frac{\partial l'}{\partial y} & \frac{\partial l'}{\partial z} \\ \frac{\partial x'}{\partial l} & \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial z} \\ \frac{\partial y'}{\partial l} & \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial z} \\ \frac{\partial z'}{\partial l} & \frac{\partial z'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\varkappa} & -\frac{\beta}{\varkappa} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{\varkappa} & \frac{1}{\varkappa} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

die bemerkenswerte Folgerung zu ziehen: Einander entsprechende Bereiche in den vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten der Größen $(x\,y\,z\,l)$ und $(x'\,y'\,z'\,l')$ haben die gleiche Ausdehnung:

$$dx'\,dy'\,dz'\,dl' = dx\,dy\,dz\,dl.$$

Demnach ergibt (258):

$$\varrho'\,dx'\,dy'\,dz' = \varrho\,dx\,dy\,dz, \tag{258a}$$

d. h. einander entsprechende Raumelemente in Σ und Σ', ersteres zu einer gegebenen allgemeinen Zeit t, letzteres zu der entsprechenden Zeit t', haben die gleiche elektrische Ladung. Wir können demnach das Resultat der obigen Entwickelungen so zusammenfassen: Geht man von dem Systeme Σ durch eine Lorentzsche Transformation (247) zum Systeme Σ' über, indem man die elektrischen Ladungen entsprechender Volumelemente zu entsprechenden Zeiten einander gleich setzt, so bleiben die Feld-

gleichungen der Elektronentheorie ungeändert, wofern man die Feldstärken $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{h}$ in Σ und $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{h}'$ in Σ' durch (256) einander zuordnet. Diesen mathematischen Satz nennen wir mit H. Minkowski[38]) das „Theorem der Relativität".

Dieses Theorem gestattet es, jedes Problem, welches sich auf ein in gleichförmiger Translationsbewegung begriffenes elektromagnetisches System Σ bezieht, in ein anderes Problem zu transformieren, welches ein ruhendes, parallel der Bewegungsrichtung im Verhältnis $1 : \sqrt{1 - \beta^2}$ gestrecktes System Σ' betrifft. Diese Abbildung auf ein ruhendes System ist uns keineswegs neu; wir hatten sie bereits in § 18 auf das Feld eines gleichförmig bewegten Elektrons angewandt und sie in § 45 bei der Erörterung des Versuches von Michelson herangezogen. Wir wissen auch, daß das System Σ', wofern man keine besondere Hypothese hinzunimmt, im allgemeinen von dem ursprünglichen Systeme im Falle der Ruhe verschieden sein wird, und daß dann die Bewegung des Systemes auf die elektromagnetischen Vorgänge in demselben einen Einfluß zweiter Ordnung äußern wird.

Die Hypothesen, durch welche man dem Postulate der Relativität Genüge leisten kann, sind jetzt auf Grund des obigen, aus den Feldgleichungen abgeleiteten Theorems folgendermaßen zu formulieren: Das ruhende System Σ', welches aus dem gleichförmig bewegten Körpersysteme Σ durch die Lorentzsche Transformation hervorgeht, soll — geometrisch wie elektromagnetisch — mit demselben Körpersysteme im Falle der Ruhe identisch sein. Diese Forderung enthält in sich die Kontraktionshypothese sowie die in § 46 aufgestellte Hypothese, die sich auf den Gang einer bewegten Uhr bzw. auf die Lichtgeschwindigkeit in einem bewegten Systeme bezieht. Zu diesen Annahmen tritt nun eine weitere, welche die Dichte der Elektrizität betrifft; da die elektrische Ladung eines Raumelements bei der Kontraktion ungeändert bleiben soll, so muß die Dichte ϱ' in dem ruhenden Systeme Σ' entsprechend kleiner sein als in dem bewegten

kontrahierten Systeme Σ; in der Tat ergibt (257), wenn man $\mathfrak{q}_x = \beta$ setzt:

(258 b) $$\varrho' = \varrho\sqrt{1-\beta^2}.$$

Diese Forderung ist eng mit der auf den Lichtweg bezüglichen Forderung (246 c) verknüpft; denn elektrische Dichte und Lichtweg sind im Sinne des Relativitätstheorems durch die allgemeine Beziehung (258) miteinander verbunden.

Findet nun in dem bewegten Systeme Σ, infolge einer gewissen Bewegung der Elektrizität, ein elektromagnetischer Vorgang statt, gemäß den Feldgleichungen (I) bis (IV), so wird ein im Raume fester Beobachter die Feldstärken $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{h}$ feststellen. Der mitbewegte Beobachter jedoch, mit seiner nach der Ortszeitskala gestellten Uhr und seinem kontrahierten Maßstabe, wird der abgeänderten Dichte der Elektrizität und des Konvektionsstromes, den Feldgleichungen (I') bis (IV') entsprechend, die Feldstärken $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{h}'$ zuordnen. Alsdann wird er die gleichförmige Bewegung des abgeschlossenen Systemes nicht wahrnehmen können, wie es das Postulat der Relativität verlangt; denn der elektromagnetische Vorgang verläuft für ihn genau so, als ob das System ruhen würde. So ist denn für ihn der Einfluß der absoluten Bewegung eliminiert, obwohl er in den ursprünglichen Feldgleichungen enthalten war.

Den Einfluß der absoluten Bewegung ganz zu beseitigen, gelingt indessen nicht. Er muß von Bedeutung werden, sobald man die Beobachtungen eines mitbewegten Beobachters mit denen eines solchen vergleicht, der sich an der Bewegung nicht beteiligt. Ein solcher würde, wenn er über hinreichend genaue Apparate verfügte, festzustellen imstande sein, ob die Veränderung (246 a) im Gange einer Uhr, welche Einstein behauptet, der Wirklichkeit entspricht; er würde, indem er seine Messung der Lichtgeschwindigkeit mit denjenigen vergleicht, die im bewegten System gewonnen sind, den von uns angenommenen Einfluß zweiter Ordnung der Bewegung auf die Lichtgeschwindigkeit (246 b) prüfen können. Die eine oder die andere Größe muß von der absoluten Bewegung des Systemes abhängen, wofern

die Maxwellschen Feldgleichungen für den leeren Raum zutreffen.

Die Lorentzschen Feldgleichungen führen, auf Grund des Relativitätspostulats, weiter dazu, einen Einfluß der Bewegung auf die Dichte der Elektrizität anzunehmen, entsprechend der Forderung (258b). Hiernach würde sich ein Elektron, in Bewegung gesetzt, derart kontrahieren, daß seine Dichte im Verhältnis $1 : \sqrt{1-\beta^2}$ zunimmt. Diese Kontraktion würde einem mitbewegten Beobachter entgehen, aber nicht einem an der Bewegung des Elektrons unbeteiligten. Nun stehen wir gerade bei der Beobachtung der Kathoden- und der Becquerel-Strahlen auf dem Standpunkte des ruhenden Beobachters. Die Messung der Ablenkung der in diesen Strahlen mit Geschwindigkeiten von der Ordnung der Lichtgeschwindigkeit bewegten Elektronen kann daher zur Prüfung jener aus dem Relativitätspostulat abgeleiteten Hypothesen dienen. Obwohl wir schon in § 22 gesehen haben, daß das Ergebnis der Versuche bisher jener Hypothese ungünstig gewesen ist, wollen wir dennoch die Dynamik des Elektrons vom Standpunkte des Relativitätspostulates noch einmal erörtern.

§ 49. Anwendung des Relativitätstheorems auf die Dynamik des Elektrons.

Wir denken uns ein Elektron von der Ladung e in gleichförmiger geradliniger Bewegung begriffen, falls es von dem Bezugssystem Σ aus beobachtet wird; das System Σ' bestimmen wir so, daß seine x-Achse mit der Bewegungsrichtung des Elektrons übereinstimmt, und daß $\mathfrak{q}' = 0$ ist. Dann wird die Geschwindigkeit in Σ:

$$\mathfrak{q}_x = \beta, \quad \mathfrak{q}_y = 0, \quad \mathfrak{q}_z = 0.$$

Beim Übergange von Σ' zu Σ wird, gemäß (258b), die elektrische Dichte infolge der Kontraktion im Verhältnis $1 : \sqrt{1-\beta^2}$ vergrößert, während die Ladung entsprechender Volumelemente, mithin auch die gesamte Ladung des Elektrons ungeändert bleibt:

$$e' = e. \tag{259}$$

Da im System Σ' das Elektron ruht, so wird die an ihm angreifende äußere Kraft $\mathfrak{K}'$ in diesem System gegeben durch den Vektor

$$\mathfrak{K}' = e'\mathfrak{e}',$$

wofern $\mathfrak{e}'$, die von den übrigen Elektronen herrührende Feldstärke, in dem vom Elektron eingenommenen Bereiche als homogen betrachtet wird. Auf Grund von (256) und (259) findet man für die Komponenten von $\mathfrak{K}'$ die Beziehungen

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{K}_x' &= e'\mathfrak{e}_x' = e\mathfrak{e}_x &&= \mathfrak{K}_x, \\ \varkappa\mathfrak{K}_y' &= e'\varkappa\mathfrak{e}_y' = e(\mathfrak{e}_y - \beta\mathfrak{h}_z) &&= \mathfrak{K}_y, \\ \varkappa\mathfrak{K}_z' &= e'\varkappa\mathfrak{e}_z' = e(\mathfrak{e}_z + \beta\mathfrak{h}_y) &&= \mathfrak{K}_z. \end{aligned}\right. \tag{260}$$

Der Vektor $\mathfrak{K}$ ist die am Elektron angreifende äußere Kraft, bezogen auf das System Σ; es ergibt sich aus dem in § 4, S. 18 zugrunde gelegten allgemeinen Ausdruck (V) für die elektromagnetische Kraft.

Wir denken uns nun, ausgehend von dem oben angenommenen Zustande — der Ruhe in Σ', der gleichförmigen Bewegung in Σ —, dem Elektron eine kleine Beschleunigung erteilt. Unter Annahme quasistationärer Bewegung wird dann in Σ' die Bewegungsgleichung bestehen (vgl. 253a):

$$M_0\dot{\mathfrak{q}}' = M_0\frac{d\mathfrak{q}'}{dl'} = \frac{M_0}{c'^2}\frac{d\mathfrak{v}'}{dt'} = \mathfrak{K}', \tag{260a}$$

wo M_0 eine Konstante bedeutet. Von hier aus kann man, auf Grund der Transformationsgesetze (255) für die Beschleunigungskomponenten und (260) für die Kraftkomponenten, sofort zu den Bewegungsgleichungnn in Σ übergehen; sie werden

$$\left\{\begin{aligned} M_0\varkappa^{-3}\dot{\mathfrak{q}}_x &= \mathfrak{K}_x \\ M_0\varkappa^{-2}\dot{\mathfrak{q}}_y &= \varkappa^{-1}\mathfrak{K}_y, \\ M_0\varkappa^{-2}\dot{\mathfrak{q}}_z &= \varkappa^{-1}\mathfrak{K}_z. \end{aligned}\right. \tag{260b}$$

Dieses sind die Bewegungsgleichungen des Elektrons für quasistationäre Bewegung, welche dem Relativitätspostulate genügen. Setzt man

$$\left\{\begin{aligned} M_s &= M_0\varkappa^{-3} = M_0(1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}}, \\ M_r &= M_0\varkappa^{-1} = M_0(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}\right. \tag{260c}$$

so haben, gemäß (253), die Größen

$$m_s = \frac{M_s}{c^2} \quad m_r = \frac{M_r}{c^2} \tag{260d}$$

die Bedeutung der longitudinalen bzw. der transversalen elektromagnetischen Masse. Aus diesen Beziehungen folgt, daß die Masse bei langsamer Bewegung in Σ einen anderen Wert hat als in Σ', falls, wie wir zuließen, die Lichtgeschwindigkeit in den beiden Systemen nicht genau den gleichen Wert hat; dann ergibt sich nämlich mit Rücksicht auf (260a):

$$m_0 c^2 = M_0 = m_0' c'^2 . \tag{260e}$$

Für die Kaufmannschen Versuche kommt indessen nicht sowohl die Masse m_0 als vielmehr das Produkt aus Masse und Quadrat der Lichtgeschwindigkeit in Frage. In der Tat geht, wie aus Gl. (122a) des § 21 zu ersehen ist, die Masse nur in der Verbindung ein:

$$\frac{\eta_0}{c} = \frac{e}{m_0 c^2};$$

diese Größe aber hat auch dann, wenn c und c' verschieden sind, in Σ und Σ' den gleichen Wert; denn aus (259) und (260e) folgt

$$\frac{e}{m_0 c^2} = \frac{e'}{m_0' c'^2} . \tag{260f}$$

Man wird auch auf dem hier eingeschlagenen Wege, vom Relativitätspostulate ausgehend, wiederum auf die Lorentzschen Formeln (125) und (125a) für die Masse des Elektrons geführt. In der Tat gelangt man, wenn man mit Lorentz das Elektron im Ruhezustande als kugelförmig betrachtet, durch die obige Transformation zu einem Heaviside-Ellipsoid in Σ, d. h. zum Lorentzschen Elektron; für ein solches hat ja Lorentz, wie wir in § 22 dargelegt haben, den Ausdruck (124e) der elektromagnetischen Bewegungsgröße abgeleitet, den wir auch schreiben können:

$$|\mathfrak{G}| = \frac{M_0}{c^2} \frac{|\mathfrak{v}|}{\varkappa}, \quad M_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{a},$$

und aus dem sich die obigen Formeln für die elektromagnetische Masse ergeben. Unter Annahme eines im Falle der Ruhe kugelförmigen Elektrons besteht also Übereinstimmung zwischen dem Relativitätspostulate und dem Impulssatze. Aber mit dem gleichfalls aus den Feldgleichungen und dem elektromagnetischen Kraftausdrucke abzuleitenden Werte der elektromagnetischen Energie lassen sich, wie wir in § 22 gezeigt haben, die Lorentzschen Formeln für die Masse nicht vereinbaren, ohne dem Elektron eine neue, nicht elektromagnetische Form der Energie zuzuschreiben.

Nun ist allerdings der Gedankengang, durch den wir auf Grund des Relativitätspostulates zu den Formeln für die Masse gelangt sind, unabhängig von der Annahme der Kugelgestalt im Falle der Ruhe. Man könnte in Σ' die Gestalt des Elektrons beliebig lassen, stets fordert das Relativitätspostulat, daß beim Übergange zu Σ die Kräfte und Beschleunigungen sich entsprechend der Lorentzschen Transformation ändern, und hieraus resultieren die Transformationsformeln (260 c). Die anscheinend größere Allgemeinheit dieses Gedankenganges könnte indessen nur dann zur Hebung der erwähnten Schwierigkeit dienen, wenn eine andere Ruhegestalt des Elektrons in Σ' angegeben würde, die beim Übergange zu Σ Werte des Impulses und der elektromagnetischen Energie ergäbe, welche sich (vgl. § 22) folgendermaßen aus der Lagrangeschen Funktion L ableiten lassen:

$$|\mathfrak{G}| = \frac{1}{c}\frac{dL}{d\beta}, \quad W = c\beta|\mathfrak{G}| - L.$$

Man gelangt nun zu den obigen Formeln für die Masse, wenn man setzt

$$L = -M_0\sqrt{1-\beta^2}, \tag{261}$$

mithin

$$|\mathfrak{G}| = \frac{1}{c}\frac{dL}{d\beta} = \frac{M_0\beta}{c\varkappa}, \tag{261a}$$

$$W = c\beta|\mathfrak{G}| - L = \frac{M_0}{\varkappa}. \tag{261b}$$

Dann müßte M_0 identisch sein mit der elektrostatischen Energie des ruhenden Elektrons

$$M_0 = W_0, \tag{261c}$$

und somit die Masse bei langsamer Bewegung, nach (260e), den Wert besitzen

$$m_0 = \frac{W_0}{c^2}. \tag{261d}$$

Dies ist die von A. Einstein[11]) und M. Planck[45]) angenommene Beziehung zwischen der Masse und der Energie eines Körpers.

Nun erhält man aber für das Lorentzsche Elektron, wie oben bemerkt wurde, M_0 gleich $^4/_3$ der elektrostatischen Energie, und es steht der Nachweis aus, daß es irgendeine Ruhegestalt des Elektrons gibt, für welche die Relation (261c) gilt. Bis er erbracht ist, wird man es als zweifelhaft bezeichnen müssen, ob sich überhaupt die elektromagnetische Dynamik des Elektrons mit dem Relativitätspostulat vereinbaren läßt. Verzichtet man aber überhaupt auf eine elektromagnetische Begründung der Dynamik des Elektrons, so fällt jeder Grund für die Anwendung des Relativitätstheorems fort, welches ja eben auf den Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes beruht. Dann entfällt um so mehr die Berechtigung, das Relativitätstheorem auf die Mechanik wägbarer Körper anzuwenden.

Auch stimmen, wie wir gesehen haben, die Konsequenzen des Relativitätspostulats keineswegs mit den Messungen der Ablenkbarkeit der Becquerelstrahlen überein. Man darf daher der Anwendung der Lorentzschen Transformation auf die eineinzelnen Elektronen einstweilen skeptisch gegenüberstehen.

Indessen gibt es viele Aufgaben der Dynamik des Elektrons, bei denen es auf die Gestalt desselben nicht ankommt, sondern wo es genügt, es als eine Punktladung zu betrachten. Bei diesen Aufgaben bringt die Anwendung des Theorems der Relativität oft eine Vereinfachung der mathematischen Behandlung mit sich.

Von diesem Standpunkte aus wollen wir das in § 15 behandelte Problem, die **Reaktionskraft der Strahlung** zu finden, wieder aufnehmen. Wir wollen zeigen, daß durch Anwendung des Relativitätstheorems sich der allgemeine Ausdruck (87) der Reaktionskraft ergibt, falls für langsame Bewegung die in Gl. 58 des § 9 angegebene Formel zutrifft, die wir mit Rücksicht auf (253a) schreiben können:

$$(262)\qquad \mathfrak{K}'^{s} = \frac{2}{3}\frac{e'^{2}}{c'^{3}}\frac{d^{2}\mathfrak{v}'}{dt'^{2}} = \frac{2}{3}e'^{2}\frac{d^{2}\mathfrak{q}'}{dl'^{2}} = \frac{2}{3}e'^{2}\ddot{\mathfrak{q}}'.$$

Dies mag der Ausdruck der Rückwirkung der Strahlung in dem System Σ' sein, welches aus dem bewegten Elektron auf Grund der im Eingang dieses Paragraphen angegebenen Transformation entsteht. Beim Übergang zu Σ ist zu bedenken, daß nach (259) die elektrische Ladung ungeändert bleibt, und daß jede elektromagnetische Kraft den Transformationsformeln (260) genügen muß. Auf Grund dieser Überlegung erhalten wir in Σ für die Reaktionskraft der Strahlung den Ausdruck

$$(262\text{a})\qquad \mathfrak{K}^{s} = \frac{2}{3}e^{2}\frac{d}{dl'}\left\{\dot{\mathfrak{p}}\right\},$$

wo $\dot{\mathfrak{p}}$ eben der in Gl. (254) des § 47 eingeführte Vektor ist, dessen Komponenten durch (254a) mit denen des Vektors $\dot{\mathfrak{q}}'$ verknüpft sind. Es handelt sich also nur noch um die Berechnung des Vektors

$$\frac{d\dot{\mathfrak{p}}}{dl'} = \frac{dl}{dl'}\frac{d}{dl}\left\{\frac{\dot{\mathfrak{q}}\varkappa^{3}}{(1-\beta\mathfrak{q}_{x})^{2}} + \frac{\mathfrak{q}\beta\dot{\mathfrak{q}}_{x}\varkappa^{3}}{(1-\beta\mathfrak{q}_{x})^{3}}\right\},$$

für den sich durch Ausführung der Differentiation und mit Rücksicht auf Gl. 250 ergibt

$$\frac{\ddot{\mathfrak{q}}\varkappa^{4}}{(1-\beta\mathfrak{q}_{x})^{3}} + \frac{\mathfrak{q}\beta\ddot{\mathfrak{q}}_{x}\varkappa^{4}}{(1-\beta\mathfrak{q}_{x})^{4}} + \frac{3\mathfrak{q}\beta\dot{\mathfrak{q}}_{x}\varkappa^{4}}{(1-\beta\mathfrak{q}_{x})^{4}} + \frac{3\mathfrak{q}\beta^{2}\dot{\mathfrak{q}}_{x}^{2}\varkappa^{4}}{(1-\beta\mathfrak{q}_{x})^{5}}.$$

Hier ist nun, wie im Eingange dieses Paragraphen angegeben worden ist, zu setzen

$$\mathfrak{q}_{x} = \beta,\ \mathfrak{q}_{y} = \mathfrak{q}_{z} = 0;\ \text{dann folgt}$$

$$(262\text{b})\ \mathfrak{K}^{s} = \frac{2}{3}e^{2}\left\{\ddot{\mathfrak{q}}\varkappa^{-2} + \mathfrak{q}(\mathfrak{q}\ddot{\mathfrak{q}})\varkappa^{-4} + 3\dot{\mathfrak{q}}(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{q}})\varkappa^{-4} + 3\mathfrak{q}(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{q}})^{2}\varkappa^{-6}\right\}.$$

Dieser Ausdruck für die Reaktionskraft der Strahlung zeigt sich, mit Rücksicht auf (253), mit dem früher von uns in § 15 angegebenen Ausdruck (87) als identisch. Das Theorem der Relativität erspart uns den dort fortgefallenen Eindeutigkeitsbeweis.

Aus der Reaktionskraft der Strahlung ergeben sich nun, wie dort gezeigt worden ist, durch Integration nach Zeit und Weg und durch partielle Integration der so entstehenden Integrale, für die von einer bewegten Lichtquelle entsandte Energie und Bewegungsgröße die Beziehungen (82b) und (83), die wir jetzt zu schreiben haben:

$$(263) \qquad -\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \frac{2}{3} e^2 \mathfrak{q} \{ \dot{\mathfrak{q}}^2 \varkappa^{-4} + (\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{q}})^2 \varkappa^{-6} \},$$

$$(263\text{a}) \qquad -\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} e^2 c \{ \dot{\mathfrak{q}}^2 \varkappa^{-4} + (\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{q}})^2 \varkappa^{-6} \} = E.$$

Den letzten Ausdruck, der die in der Sekunde von der Lichtquelle emittierte Energie angibt, haben wir gleich E gesetzt. Der erste bestimmt die in der Sekunde emittierte Bewegungsgröße und führt zu der Bewegungsgleichung der Lichtquelle:

$$(263\text{b}) \qquad \frac{d}{dt}\{ m\mathfrak{v} \} = -\frac{\mathfrak{q}}{c} E = -\mathfrak{v} \cdot \frac{E}{c^2}.$$

Die emittierte Wellenstrahlung übt eine der Bewegung der Lichtquelle entgegengerichtete Kraft auf diese aus. Wirken keine sonstigen Kräfte, so muß demnach entweder die Geschwindigkeit oder die Masse der Lichtquelle abnehmen. Die erstere Möglichkeit ist auszuschließen, wenn man das Relativitätspostulat erfüllen will. Denn beim Übergang zu Σ' würde die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und mithin die Reaktionskraft (263b) gleich Null werden, während der Geschwindigkeitsänderung in Σ, wie in § 47 gezeigt wurde, auch eine Geschwindigkeitsänderung in Σ' entspricht. Das Relativitätspostulat führt somit, wie A. Einstein[11]) und M. Planck[45]) bemerkt haben, zu einer Massenabnahme eines leuch-

tenden Körpers, die gleich seiner Emission, dividiert durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit, ist:

$$-\frac{dm}{dt} = \frac{E}{c^2}. \tag{263c}$$

Dieselbe ist natürlich zu klein, um der Beobachtung zugänglich zu sein.

§ 50. Die allgemeinen Feldgleichungen für rasch bewegte Körper.

Die Bedeutung der Lorentzschen Transformation beruht darauf, daß sie die elektromagnetischen Feldgleichungen für den leeren Raum in sich selbst überführt. Die Schwierigkeiten, welche in der Dynamik der Elektronen der Erfüllung des Relativitätspostulats entgegenstehen, rühren daher, daß die Dynamik der Elektronen nicht auf den Feldgleichungen allein beruht, sondern daneben noch auf kinematischen Bedingungen.

Diejenigen elektrischen und optischen Vorgänge dagegen, welche sich im Innern der wägbaren Körper abspielen, sind in ihrem Verlaufe vollkommen durch das System der Feldgleichungen bestimmt. Wird diesen Feldgleichungen für den Fall rascher Bewegungen eine Form gegeben, welche durch eine Lorentzsche Transformation in die Feldgleichungen für den Fall der Ruhe überzuführen ist, so ist das Relativitätspostulat ohne weiteres erfüllbar. In dieses Gebiet fallen die meisten der Versuche über den Einfluß der Erdbewegung, deren negatives Ergebnis der Erklärung bedarf: Die Experimente von Lord Rayleigh[48]) und D. B. Brace[6]), welche die Entdeckung einer durch die Erdbewegung bedingten Doppelbrechung zum Ziele hatten; ferner die Messungen von F. T. Trouton[63]) und A. O. Rankine, welche den Widerstand eines Drahtes betrafen, der das eine Mal parallel, das andere Mal senkrecht zur Richtung der Erdbewegung gespannt ist. Diese Versuche beanspruchen eine so große Genauigkeit, daß Größen zweiter Ordnung in β hätten beobachtbar sein müssen. Wie wir in diesem Paragraphen sehen werden, erklären die in § 38 aufgestellten Feldgleichungen — sowohl diejenigen von H. Minkowski als

auch diejenigen von E. Cohn — die Ergebnislosigkeit dieser und vieler ähnlicher Versuche.

Die Grundgleichungen von Minkowski lauten, wenn $l = ct$, $\mathfrak{w} = c\mathfrak{q}$ gesetzt wird:

$$\text{(Id)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{H} - \frac{\partial 4\pi \mathfrak{D}}{\partial l} = 4\pi \left\{ \varrho \mathfrak{q} + \frac{\mathfrak{i}}{c} \right\},$$

$$\text{(IId)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial l} = 0,$$

$$\text{(IIId)} \qquad \operatorname{div} 4\pi \mathfrak{D} = 4\pi \varrho,$$

$$\text{(IVd)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0.$$

Hierzu treten zwei Bedingungen, welche die Vektoren $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{D}, \mathfrak{B}$ im bewegten Körpersystem Σ miteinander verknüpfen. Sie ergeben sich, indem man aus den Gl. (15a—d) die dort mit $\mathfrak{E}' \mathfrak{H}'$ bezeichneten Vektoren eliminiert:

$$\text{(Vd)} \qquad 4\pi \mathfrak{D} + [\mathfrak{q}\mathfrak{H}] = \varepsilon \{ \mathfrak{E} + [\mathfrak{q}\mathfrak{B}] \},$$

$$\text{(VId)} \qquad \mathfrak{B} - [\mathfrak{q}\mathfrak{E}] = \mu \{ \mathfrak{H} - [\mathfrak{q} 4\pi \mathfrak{D}] \}.$$

Wir vergleichen dieses System von Differentialgleichungen mit den Feldgleichungen der Elektronentheorie, die wir in § 48 in Lorentzscher Weise transformiert haben. Die Gleichungen (IId, IVd) entsprechen durchaus den Feldgleichungen (II, IV), nur daß an Stelle von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{h}$ dort, hier die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$ treten, die in § 28 als die Mittelwerte jener definiert worden waren. Aus der formalen Identität folgt ohne weiteres, daß die transformierten Gleichungen jetzt lauten:

$$\text{(II'd)} \qquad \operatorname{curl}' \mathfrak{E}' + \frac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial l'} = 0,$$

$$\text{(IV'd)} \qquad \operatorname{div}' \mathfrak{B}' = 0,$$

wofern die Vektoren $\mathfrak{E}', \mathfrak{B}'$ des Systemes Σ' denen des Systemes Σ durch die folgenden, den Gl. (256) entsprechenden Beziehungen zugeordnet werden:

$$(264) \qquad \begin{cases} \mathfrak{E}'_x = \mathfrak{E}_x, & \varkappa \mathfrak{E}'_y = \mathfrak{E}_y - \beta \mathfrak{B}_z, \quad \varkappa \mathfrak{E}'_z = \mathfrak{E}_z + \beta \mathfrak{B}_y; \\ \mathfrak{B}'_x = \mathfrak{B}_x, & \varkappa \mathfrak{B}'_y = \mathfrak{B}_y + \beta \mathfrak{E}_z, \quad \varkappa \mathfrak{B}'_z = \mathfrak{B}_z - \beta \mathfrak{E}_y. \end{cases}$$

Ferner lehrt der Vergleich von (Id, IIId) mit den Gl. (I, III) des § 48, daß in diesen Gleichungen den Vektoren $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{h}$ dort, hier die Vektoren $4\pi\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ entsprechen. Es liegt somit nahe, diese Vektoren beim Übergang zu Σ' folgendermaßen zu transformieren:

$$(265)\left\{\begin{array}{lll} 4\pi\mathfrak{D}_x' = 4\pi\mathfrak{D}_x, & \varkappa 4\pi\mathfrak{D}_y' = 4\pi\mathfrak{D}_y - \beta\mathfrak{H}_z, & \varkappa 4\pi\mathfrak{D}_z' = 4\pi\mathfrak{D}_z + \beta\mathfrak{H}_y; \\ \mathfrak{H}_x' = \mathfrak{H}_x, & \varkappa\mathfrak{H}_y' = \mathfrak{H}_y + \beta 4\pi\mathfrak{D}_z, & \varkappa\mathfrak{H}_z' = \mathfrak{H}_z - \beta 4\pi\mathfrak{D}_y. \end{array}\right.$$

Nimmt man dies an, so gehen die Gleichungen (Id, IIId) durch die Lorentzsche Transformation in die Grundgleichungen für ruhende Körper über:

$$\text{(I}'\text{d)} \qquad \operatorname{curl}'\mathfrak{H}' - \frac{\partial 4\pi\mathfrak{D}'}{\partial l'} = 4\pi\frac{\mathfrak{i}'}{c},$$

$$\text{(III}'\text{d)} \qquad \operatorname{div}' 4\pi\mathfrak{D}' = 4\pi\varrho',$$

falls beim Übergang von dem gleichförmig bewegten System Σ zum ruhenden System Σ' sich noch die Größen ϱ, $\varrho\mathfrak{q} + \frac{\mathfrak{i}}{c}$ in ϱ', $\frac{\mathfrak{i}'}{c}$ so umrechnen, wie gemäß (257, 257a, b) in § 48 die Größen ϱ und $\varrho\mathfrak{q}$ in ϱ' und $\varrho'\mathfrak{q}'$ sich transformierten:

$$(266) \qquad \varkappa\varrho' = \varrho - \beta\left(\varrho\mathfrak{q}_x + \frac{\mathfrak{i}_x}{c}\right),$$

$$(266\text{a}) \qquad \varkappa\mathfrak{i}_x' = c\varrho\mathfrak{q}_x + \mathfrak{i}_x - c\varrho\beta,$$

$$(266\text{b}) \qquad \mathfrak{i}_y' = c\varrho\mathfrak{q}_y + \mathfrak{i}_y, \quad \mathfrak{i}_z' = c\varrho\mathfrak{q}_z + \mathfrak{i}_z;$$

da das ganze System Σ sich mit der Geschwindigkeit $c\mathfrak{q}_x = c\beta$ parallel der x-Achse bewegt, so kann man einfacher schreiben:

$$(267) \qquad \mathfrak{i}_x = \varkappa\mathfrak{i}_x', \quad \mathfrak{i}_y = \mathfrak{i}_y', \quad \mathfrak{i}_z = \mathfrak{i}_z',$$

$$(267\text{a}) \qquad \varkappa\varrho = \varrho' + \beta\frac{\mathfrak{i}_x'}{c}.$$

In dem ruhenden System Σ' gelten nun die Feldgleichungen, die aus (I′d bis IV′d) durch Einführung der Beziehungen

$$(268) \qquad 4\pi\mathfrak{D}' = \varepsilon\mathfrak{E}', \quad \mathfrak{B}' = \mu\mathfrak{H}', \quad \mathfrak{i}' = \sigma\mathfrak{E}'$$

hervorgehen. Die ersten beiden dieser Beziehungen ergeben

sich nun wirklich aus den Relationen (Vd, VId), wenn man, gemäß (264) und (265), vom bewegten Systeme Σ zum ruhenden Systeme Σ' übergeht. Hieraus erzielt man, zunächst für Isolatoren: Die Minkowskischen Feldgleichungen für ein in gleichförmiger Translationsbewegung begriffenes System gehen durch die Lorentzsche Transformation in die Maxwell-Hertzschen Feldgleichungen für ruhende Körper über. Sie sind also geeignet, auf Grund der in den letzten Paragraphen erörterten Hypothesen, das Postulat der Relativität zu erfüllen.

Damit dies auch für Leiter gelte, muß, wie aus der letzten der Relationen (268) im Verein mit (264) und (267) hervorgeht, im bewegten System Σ sein:

$$(269)\quad \mathfrak{i}_x = \varkappa\sigma\mathfrak{E}_x,\quad \mathfrak{i}_y = \frac{\sigma}{\varkappa}\left\{\mathfrak{E}_y - \beta\mathfrak{B}_z\right\},\quad \mathfrak{i}_z = \frac{\sigma}{\varkappa}\left\{\mathfrak{E}_z + \beta\mathfrak{B}_y\right\}.$$

Die Komponenten der Dichte des Leitungsstromes sind also jeweils proportional den Komponenten der elektromagnetischen Kraft, d. h. des Vektors $\mathfrak{E} + [\mathfrak{q}\mathfrak{B}]$; doch wird durch die Bewegung die Leitfähigkeit für parallel der Bewegungsrichtung fließenden Strom im Verhältnis $\varkappa : 1$ kleiner, dagegen für Ströme, die senkrecht zur Bewegungsrichtung fließen, im Verhältnis $1 : \varkappa$ größer als im Falle der Ruhe.

Daß so das negative Ergebnis des Versuchs von Trouton und Rankine seine Deutung findet, ist klar[63]). Die Kontraktion des Drahtes, die parallel seiner Längsrichtung stattfinden soll, wenn er der Erdbewegung parallel gespannt ist, würde eine Widerstandsabnahme zur Folge haben; diese wird durch jene Abnahme der spezifischen Leitfähigkeit kompensiert. Ist hingegen der Draht senkrecht zur Bewegungsrichtung der Erde gespannt, so würde die Lorentzsche Kontraktion eine Abnahme des Querschnitts, mithin eine Widerstandszunahme im Verhältnis $1 : \varkappa$ im Gefolge haben, deren Kompensation gerade in jener Zunahme der Leitfähigkeit für senkrecht zur Bewegungsrichtung fließenden Strom liegt.

Die Minkowskischen Feldgleichungen für bewegte Körper stehen, wenngleich sie nicht aus den Feldgleichungen der

Elektronentheorie auf Grund von Hypothesen über die molekularen Vorgänge abgeleitet sind, doch mit dieser Theorie in engem Zusammenhange; es wurde bei ihrer Aufstellung das aus den Feldgleichungen der Elektronentheorie gewonnene Theorem der Relativität als heuristisches Prinzip benutzt. Die Feldgleichungen der Elektrodynamik bewegter Körper hingegen, die von E. Cohn[8]) herrühren, sind auf einem von der Elektronentheorie unabhängigen, induktiven Wege gewonnen. Sie lauten, wie wir bereits in § 38 angegeben haben:

$$\text{(Ie)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{H}' = 4\pi \left\{ \frac{\partial' \mathfrak{D}}{\partial l} + \frac{\mathfrak{i}}{c} \right\},$$

$$\text{(IIe)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{E}' = - \frac{\partial' \mathfrak{B}}{\partial l},$$

$$\text{(IIIe)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho,$$

$$\text{(IVe)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0,$$

$$\text{(Ve)} \qquad 4\pi \mathfrak{D} + [\mathfrak{q}\mathfrak{H}'] = \varepsilon \mathfrak{E}', \quad \mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}',$$

$$\text{(VIe)} \qquad \mathfrak{B} - [\mathfrak{q}\mathfrak{E}'] = \mu \mathfrak{H}'$$

Dabei ist $c\mathfrak{q}$ der Geschwindigkeitsvektor der Materie. In (IVe) ist übrigens der Ansatz von E. Cohn insofern spezialisiert worden, als die Existenz von wahrem Magnetismus hier nicht angenommen wird.

Die Cohnschen Grundgleichungen sind für den Fall eines gleichförmig bewegten Systemes zwar nicht durch die Lorentzsche Transformation auf die Form der Grundgleichungen für ruhende Körper zu bringen, wohl aber durch eine andere, einfachere Transformation, nämlich die folgende:

$$(270) \qquad l' = l - \beta x, \quad x' = x - \beta l, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Hier sind x', y', z' die Koordinaten eines Punktes des parallel der x-Achse bewegten materiellen Systemes, bezogen auf ein mitbewegtes Achsensystem. Von einer Kontraktion beim Übergang von Σ' zu dem ursprünglichen materiellen System Σ ist hier keine Rede; ebensowenig ist es notwendig, zur Deutung der Beziehung zwischen den Lichtwegen $l = ct$ und $l' = c't'$, eine Verschiedenheit in den Skalen der allgemeinen Zeit und

der Ortszeit oder verschiedene Worte der Lichtgeschwindigkeit in Σ und Σ' anzunehmen.

Es ist nicht schwer, in die Feldgleichungen (Ie bis VIe) die neuen Unabhängigen x', y', z', l' einzuführen. Zunächst ist, da die Differentiationen nach l in (Ie, IIe) sich auf mit der Materie bewegte Punkte bezieht, d. h. hier auf konstant gehaltene x', y', z', zu setzen:

$$\frac{\partial'}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l'}.$$

Beachtet man ferner, daß hier ist:

$$\mathfrak{q}_x = \beta, \quad \mathfrak{q}_y = 0, \quad \mathfrak{q}_z = 0,$$

so kann man die zur Umrechnung von curl und div dienenden Regeln symbolisch so schreiben:

$$\text{curl} = \text{curl}' - \left[\mathfrak{q}\,\frac{\partial}{\partial l'}\right],$$

$$\text{div} = \text{div}' - \left(\mathfrak{q}\,\frac{\partial}{\partial l'}\right).$$

Auf Grund dieser Regeln und der Beziehungen (Ve, VIe) findet man die auf das System Σ' transformierten Feldgleichungen:

(I′e) $$\text{curl}'\,\mathfrak{H}' = \frac{\partial \varepsilon \mathfrak{E}'}{\partial l'} + \frac{4\pi\sigma}{c}\,\mathfrak{E}',$$

(II′e) $$\text{curl}'\,\mathfrak{E}' = -\frac{\partial \mu \mathfrak{H}'}{\partial l'},$$

(III′e) $$\text{div}'\,\varepsilon\mathfrak{E}' = 4\pi\varrho',$$

(IV′e) $$\text{div}'\,\mu\mathfrak{H}' = 0,$$

wobei ϱ' die Bedeutung hat:

(270a) $$\varrho' = \varrho - \frac{\beta}{c}\,\mathfrak{i}_x.$$

Hier ist also — bei fehlendem Leitungsstrom $\mathfrak{i}$ — die Dichte der Elektrizität im bewegten System Σ die gleiche wie in dem auf Ruhe transformierten System Σ', während in der Lorentz-Minkowskischen Theorie, entsprechend der Kontraktion der bewegten Materie und Elektrizität, gemäß (267a) die Dichte

der Elektrizität im Verhältnis $1 : \varkappa$ beim Übergang zum bewegten Systeme zu ändern ist. In beiden Theorien beeinflußt, wie aus (267a) bzw. (270a) hervorgeht, ein der Bewegungsrichtung paralleler Leitungsstrom die Beziehung zwischen den Dichten der Elektrizität in Σ und Σ'. H. A. Lorentz spricht in diesem Falle von einer „Kompensationsladung" des stromführenden Drahtes, da jene Ladung die in Σ vom Magnetfeld des Stromes auf mitbewegte elektrische Ladungen ausgeübte Kraft gerade aufhebt.

Die Feldgleichungen (I'e bis IV'e), welche aus den Cohnschen Feldgleichungen durch die Transformation (270) hervorgehen, stimmen nun in der Tat mit den Maxwell-Hertzschen Feldgleichungen für ruhende Körper überein. Es genügt also die Theorie von E. Cohn dem Postulate der Relativität, ohne daß sie eine Deformation der bewegten Körper anzunehmen hat, oder eine Änderung im Werte der Lichtgeschwindigkeit oder gar ein spezifisches Zeitmaß im bewegten Systeme. Hier findet also das negative Ergebnis der Versuche, welche über den Einfluß der Erdbewegung auf die elektromagnetischen und optischen Erscheinungen angestellt worden sind, eine in mancher Hinsicht einfachere Deutung als in der Lorentzschen Theorie.

Die Cohnschen Feldgleichungen für bewegte Körper gehen nicht wie die Minkowskischen dadurch in die Feldgleichungen für den Äther über, daß man $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ setzt. Dieser Umstand bringt Schwierigkeiten mit sich, wenn es sich um Vorgänge handelt, bei deren Deutung man von dem Einfluß der wägbaren Materie abzusehen pflegt. Hierher gehört der Versuch von Michelson, dessen Theorie wir, vom Lorentzschen Standpunkte aus, in § 45 gegeben haben. Dabei wurde von dem Einfluß der atmosphärischen Luft abgesehen und nur von der Lichtfortpflanzung im leeren Raume gesprochen; das negative Ergebnis des Versuches wurde durch die Kontraktion der Materie erklärt. Nach E. Cohn dagegen soll eine Kontraktion der Steinkonsole, welche die Spiegel trägt, nicht stattfinden. Es soll der Einfluß der Luft es bedingen, daß hier nicht die

Feldgleichungen für den leeren Raum, sondern eben die Feldgleichungen (Ie bis VIe) für bewegte Dielektrika Anwendung finden. Das negative Versuchsergebnis findet so seine Erklärung; in der Tat werden einem Beobachter, der sich mit der Erde bewegt, die Vorgänge gemäß den Feldgleichungen (I'e bis IV'e) zu verlaufen scheinen, d. h. genau so, als ob die Erde ruhte. Hiernach würde jedoch ein positives Ergebnis des Michelsonschen Versuches zu erwarten sein, wenn man ihn im luftleeren Raume ausführen würde.

Ferner fehlt der Theorie von Cohn der Zusammenhang mit der Dynamik der Elektronen; sie umfaßt nicht diejenigen elektromagnetischen Vorgänge, die man an den Kathodenstrahlen und den Radiumstrahlen beobachtet. Hier kann nur eine atomistische Theorie Erfolge erzielen; der Cohnschen Theorie bleiben, ihrem rein phänomenologischen Standpunkte entsprechend, diese feineren Vorgänge verschlossen. Sie ist in ihrer Anwendung auf diejenigen Vorgänge beschränkt, die sich in den wägbaren Körpern abspielen.

Allerdings scheint es, als ob die auf dem Relativitätspostulate fußende Weiterbildung der Lorentzschen Elektrodynamik ebenfalls auf die Vorgänge in wägbaren Körpern beschränkt ist; denn ihre Anwendung auf die freien Elektronen begegnet den mehrfach erörterten Schwierigkeiten. Es wäre auch sehr wohl denkbar, daß das Relativitätspostulat für die Bewegung der wägbaren Materie zuträfe, aber nicht auf die Bewegung der freien Elektronen anwendbar wäre. Freilich scheint, wenn man diese Auffassung annimmt, das Band zwischen den Vorgängen der Konvektionsstrahlung und denen, die sich im lichtaussendenden Moleküle abspielen, gelöst zu sein. Die Verknüpfung zwischen diesen Vorgängen aber ist eine wertvolle Errungenschaft der Elektronentheorie, die kein Physiker leichten Herzens aufgeben möchte. Bedenkt man jedoch, wie gering die Ergebnisse der Elektronentheorie in der Erklärung der Spektralgesetze und der anomalen Zeeman-Effekte noch sind, so wird man gerade hier noch am ehesten eine Lücke in dem Weltbilde der Elektronentheorie vermuten. Es ist sehr

wohl möglich, daß die Elektrizität im Innern der wägbaren Körper ein anderes Verhalten zeigt als bei der Konvektionsstrahlung, wo sie sich losgelöst von der Materie bewegt. So einfach, wie es die Theorie des normalen Zeeman-Effektes annimmt, ist die Verknüpfung von Elektrizität und Materie sicher nicht. Unserer Unkenntnis der zwischen den Atomen der Materie und der Elektrizität wirkenden Kräfte würde es entsprechen, wenn man die elektromagnetischen und optischen Vorgänge in bewegten Körpern mehr phänomenologisch durch ein System von Feldgleichungen beschreiben würde, welches dem Relativitätspostulate genügt, sei es durch die Cohnschen oder die Lorentz-Minkowskischen. So würde für die Dynamik der Elektronen der Weg freigehalten, welcher dem Fortschritte der experimentellen Forschung auf dem Gebiet der Kathoden und Radium-Strahlung zu folgen hat.

Formelzusammenstellung.

I. Feld und Bewegung einzelner Elektronen.

Grundgleichungen der Elektronentheorie: (§ 4 S. 17, 18)

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \text{I)}\ \operatorname{curl} \mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = 4\pi \mathfrak{i} = 4\pi\varrho\frac{\mathfrak{v}}{c}, \\ \text{II)}\ \operatorname{curl} \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = 0, \\ \text{III)}\ \operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\varrho, \\ \text{IV)}\ \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0, \\ \text{V)}\ \mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\left[\mathfrak{v}\mathfrak{H}\right] \end{cases}$$

(elektromagnetische Kraft pro Einheit der Ladung).

Dichte der elektromagnetischen Bewegungsgröße:

$$(\beta)\quad \mathfrak{g} = \frac{1}{c^2}\mathfrak{S} = \frac{1}{4\pi c}\left[\mathfrak{E}\mathfrak{H}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 18 S. 26)}$$

Lösung der Grundgleichungen:

$$(\gamma)\quad \begin{cases} \mathfrak{H} = \operatorname{curl} \mathfrak{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 28 S. 36)} \\ \mathfrak{E} = -\nabla\Phi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 29 S. 36)} \\ \text{Es sind die elektromagnetischen Potentiale:} \\ \Phi = \int\limits_0^\infty \lambda\, d\lambda \int d\omega\, \varrho(\lambda,\ l-\lambda) \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 50 S. 56)} \\ \mathfrak{A} = \int\limits_0^\infty \lambda\, d\lambda \int d\omega\, \mathfrak{k}(\lambda,\ l-\lambda) \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 50a S. 56)} \end{cases}$$

Dabei ist $l = ct$, λ ist der Latensweg, $\lambda^2 d\omega$ das Flächenelement einer mit dem Radius λ um den Aufpunkt geschlagenen Kugel.

Lösung mit Hilfe des Hertzschen Vektors:

$$(\delta)\quad \begin{cases} \mathfrak{Z} = \int\limits_0^l \lambda\, d\lambda \int d\omega\, \mathfrak{q}(\lambda,\ l-\lambda) \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 48 S. 53)} \\ \mathfrak{q} = \int\limits_0^l \mathfrak{k}\, dl \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 47 S. 53)} \\ \left.\begin{aligned} \mathfrak{H} &= \operatorname{curl} \dfrac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial l} \\ \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0 &= \nabla \operatorname{div} \mathfrak{Z} - \dfrac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial l^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{Gl. 48c, d S. 54)} \end{cases}$$

$\mathfrak{E}_0$ ist das anfängliche elektrostatische Feld.

Bewegte Punktladung e: $\mathfrak{v}$ Geschwindigkeit, $\beta = \dfrac{|\mathfrak{v}|}{c}$, $\varkappa = \sqrt{1-\beta^2}$, t' Zeit des Entsendens, t Zeit des Eintreffens im Aufpunkte, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}_1$ Fahrstrahl vom Orte des Entsendens zum Aufpunkte bzw. entsprechender Einheitsvektor:

$$(\varepsilon)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi &= \frac{e}{r\left(1-\frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)} = \frac{e}{r}\frac{\partial t'}{\partial t} \\ \mathfrak{A} &= \frac{e\mathfrak{v}}{rc\left(1-\frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)} = \frac{e\mathfrak{v}}{rc}\frac{\partial t'}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 63, 64, 65, § 11)}$$

$$(\zeta)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{E} &= -\frac{e\dot{\mathfrak{v}}}{rc^2}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 + \frac{e}{r^2}\left\{\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{v}}{c}\right\}\left\{1-\beta^2+\frac{(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r})}{c^2}\right\}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^3 \\ \mathfrak{H} &= [\mathfrak{r}_1 \mathfrak{E}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

(Gl. 72, 73, S. 95)

Ausgestrahlte Energie und Bewegungsgröße:

$$(\eta)\quad \left\{\begin{aligned} W_{12} &= \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\cdot\int_1^2 dt'\left\{\frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^4}+\frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^6}\right\} \\ \mathfrak{G}_{12} &= \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^5}\cdot\int_1^2 dt'\,\mathfrak{v}\left\{\frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^4}+\frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^6}\right\}\end{aligned}\right\} \quad . \text{ (Gl. 82, 83, S. 116)}$$

Reaktionskraft der Strahlung:

$$(\vartheta)\quad \mathfrak{K}' = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left\{\frac{\ddot{\mathfrak{v}}}{\varkappa^2}+\frac{\mathfrak{v}(\mathfrak{v}\ddot{\mathfrak{v}})}{c^2\varkappa^4}+\frac{3\dot{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})}{c^2\varkappa^4}+\frac{3\mathfrak{v}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^4\varkappa^6}\right\}. \text{ (Gl. 87, S. 119)}$$

Elektromagnetische Massen des Elektrons. Allgemeine Formeln:

$$(\iota)\quad \left\{\begin{aligned} m_s &= \frac{d|\mathfrak{G}|}{d|\mathfrak{v}|} \text{ longitudinale Masse} \\ m_r &= \frac{|\mathfrak{G}|}{|\mathfrak{v}|} \text{ transversale Masse}\end{aligned}\right\}. \text{ (Gl. 115, 115a, S. 174)}$$

Starres kugelförmiges Elektron (m_0 Masse bei langsamer Bewegung):

$$(\varkappa)\quad \left\{\begin{aligned} m_s &= m_0\cdot\frac{3}{4}\chi(\beta), \\ \chi(\beta) &= \frac{1}{\beta^2}\left\{-\frac{1}{\beta}\,ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)+\frac{2}{1-\beta^2}\right\} \quad \text{(Gl. 117d, S. 180)} \\ m_r &= m_0\cdot\frac{3}{4}\psi(\beta), \\ \psi(\beta) &= \frac{1}{\beta^2}\left\{\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta}\right)ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)-1\right\} \quad . \text{ (Gl. 117e, S. 180)}\end{aligned}\right.$$

Lorentzsches Elektron:

$$(\lambda)\quad \left\{\begin{aligned} m_s &= m_0\cdot\varkappa^{-3} \\ m_r &= m_0\cdot\varkappa^{-1}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{ (Gl. 125, 125a, S. 191)}$$

Buchererersches Elektron:

$$(\mu)\quad \left\{\begin{aligned} m_s &= m_0\cdot\varkappa^{-8/3}\left(1-\frac{1}{3}\beta^2\right) \\ m_r &= m_0\cdot\varkappa^{-2/3}\end{aligned}\right\} \quad . . \text{ (Gl. 130c, d, S. 197)}$$

II. Elektromagnetische Vorgänge in wägbaren Körpern.

Grundgleichungen der Elektronentheorie nach H. Minkowski (§§ 38 und 50):

$$(\nu)\quad \begin{cases} \text{(Id)} & \operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\left\{\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \varrho\mathfrak{w} + \mathfrak{i}\right\} \\ \text{(IId)} & \operatorname{curl} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \\ \text{(IIId)} & \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho, \\ \text{(IVd)} & \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0; \\ & 4\pi\mathfrak{D} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{H}] = \varepsilon\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{B}]\right\}, \\ & \mathfrak{B} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{E}] = \mu\left\{\mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\, 4\pi\mathfrak{D}]\right\}. \end{cases}$$

Relativer Strahl:

$$(\xi)\quad \begin{cases} \mathfrak{S}' = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 213b, S. 325)} \\ \left.\begin{aligned} \mathfrak{E}' &= \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{H}] \\ \mathfrak{H}' &= \mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{E}] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 203, S. 316)} \end{cases}$$

Flächenkraft für die Flächeneinheit einer im Raume bewegten Fläche:

$$(o)\quad \mathfrak{T}' = \frac{1}{8\pi}\left\{2\mathfrak{E}'\mathfrak{E}_n + 2\mathfrak{H}'\mathfrak{H}_n - \mathfrak{n}\{\mathfrak{E}\mathfrak{E}' + \mathfrak{H}\mathfrak{H}'\}\right\}.$$

(Gl. 204, S. 317)

Thermodynamisches Gesetz der Wellenstrahlung:

$$(\pi)\quad H = \vartheta^3 \cdot g\left(\frac{\vartheta}{\nu}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 228, S. 341)}$$

bestimmt die Helligkeit H der Strahlung von der Temperatur ϑ und der Schwingungszahl ν.

Plancksche Formel:

$$(\varrho)\quad H = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k\vartheta}} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 229, S. 345)}$$

{k und h sind universelle Konstanten}.

Literaturregister.

1) **Abraham**, M. Gött. Nachr. 1902, S. 20. Ann. d. Phys. **10**, S. 105, 1903.
2) —. Boltzmann-Festschrift, S. 85. Ann. d. Phys. **14**, S. 236, 1904.
3) —. Ann. d. Phys. **66**, S. 435, 1898; Physik. Ztschr. **2**, S. 329, 1901.
4) **Becquerel**, H. C. R. **125**, S. 679, 1897.
5) **Boltzmann**, L. Ann. d. Phys. **22**, S. 35, 291, 1884.
6) **Brace**, D. B. Phil. Mag. **7**, S. 317, 1904.
7) **Bucherer**, A. H. Mathem. Einf. in die Elektronentheorie S. 58, 1904.
8) **Cohn**, E. Ann. d. Phys. **7**, S. 29, 1902. Berl. Ber. 1904, S. 1294, 1404.
9) **Drude**, P. Ann. d. Phys. **48**, S. 536, 1893; **14**, S. 677, 1904. Lehrbuch d. Optik 1906.
10) —. Ann. d. Phys. **1**, S. 566; **3**, S. 369, 1900.
11) **Einstein**, A. Ann. d. Phys. **17**, S. 891; **18**, S. 639, 1905.
12) **Haga**, H. u. **Wind**, C. H. Akad. v. Wet. te Amsterdam **7**, S. 387 u. 500, 1899; **11**, S. 350, 1902. Ann. d. Phys. **68**, S. 884, 1899.
13) **Hasenöhrl**, F. Ann. d. Phys. **15**, S. 344, 1904; **16**, S. 589, 1905. Wien. Ber. **116**, S. 1391, 1907.
14) **Heaviside**, O. Phil. Mag. **27**, S. 324, 1889.
15) —. Electrical papers II, S. 495.
16) —. Nature **67**, S. 6. Nov. 1902.
17) **Herglotz**, G. Gött. Nachr. 1903, S. 357.
18) **Hertz**, H. Ann. d. Phys. **36**, S. 1, 1888. Ges. Werke II, S. 147.
19) **Hertz**, P. Physik. Zeitschr. **4**, S. 848, 1903; **5**, S. 109, 1904. Dissert. Göttingen, 1904.
20) —. Gött. Nachr. 1906, S. 229. Math. Ann. **65**, S. 1, 1907.
21) **Kaufmann**, W. Ann. d. Phys. **61**, S. 544, 1897; **65**, S. 431, 1898.
22) **Kaufmann**, W. u. **Aschkinaß**, E. Ann. d. Phys. **62**, S. 588, 1897.
23) **Kaufmann**, W. Gött. Nachr. 1901, S. 143; 1902, S. 291; 1903, S. 90. Ann. d. Phys. **19**, S. 487, 1906.
24) **Langevin**, P. Ann. Chim. Phys. **28**, S. 289, 433, 1903.
25) —. Ann. Chim. Phys. **5**, S. 70, 1905.
26) **Lebedew**, P. Ann. d. Phys. **6**, S. 433, 1901.
27) **Lenard**, Ph. Ann. d. Phys. **64**, S. 279; **65**, S. 504, 1898.
28) **Liénard**, A. L'éclairage él. **16**, S. 5, 53, 106, 1898.
29) **Lorentz**, H. A. Ann. d. Phys. **9**, S. 641, 1880. La théorie électrom. de Maxwell, 1892. Akad. v. Wet. te Amsterdam **6**, S. 513, 1898.
30) —. Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, 1895.

31) Lorentz, H. A. Akad. v. Wet. te Amsterdam **11**, S. 305, 1902. Enzykl. d. mathem. Wissensch. Art. V, 14, Nr. 26—34.
32) —. Akad. v. Wet. te Amsterdam **12**, S. 986, 1904.
33) —. Rapport du congrès intern. de phys. Paris. Bd. III, S. 1, 1900.
34) —. Akad. v. Wet. te Amsterdam **11**, S. 787, 1903.
35) Lummer, O. u. Wien, W. Ann. d. Phys. **56**, S. 451, 1895.
36) Lummer, O. u. Pringsheim, E. Ann. d. Phys. **63**, S. 395, 1897; **3**, S. 159, 1900.
37) Michelson, A. Americ. Journ. **22**, S. 120, 1881; **34**, S. 333, 1887.
38) Minkowski, H. Gött. Nachr. 1908, S. 1.
39) Morton, W. B. Phil. Mag. **41**, S. 488, 1896.
40) Mosengeil, K. v. Ann. d. Phys. **22**, S. 867, 1907.
41) Nichols, E. F. u. Hull, G. F. Ann. d. Phys. **12**, S. 225, 1903.
42) Planck, M. Ann. d. Phys. **60**, S. 577, 1897. Vorl. über d. Theorie der Wärmestrahlung, S. 100ff., 1906.
43) —. Ann. d. Phys. **1**, S. 69, 719; **3**, S. 764, 1900; **4**, S. 553, 564; **6**, S. 818, 1901. Vorl. über die Theorie der Wärmestrahlung, 1906.
44) —. Berl. Ber. 1902, S. 470.
45) —. Verh. d. Physik. Ges. **4**, S. 136, 1906. Berl. Ber. 1907, S. 542.
46) Poincaré, H. Arch. Néerland. **5** (Lorentz-Festschrift) S. 252, 1900.
47) —. Rendic. Circ. mat. Palermo **21**, S. 129, 1906.
48) Rayleigh, Phil. Mag. **4**, S. 678, 1902.
49) Riecke, E. Ann. d. Phys. **66**, S. 353, 545, 1199, 1898.
50) Runge, C. u. Paschen, F. Berl. Ber. 1902, S. 380, 720.
51) Schwarzschild, K. Gött. Nachr. 1903, S. 132.
52) Searle, G. F. C. Phil. Trans. A. **187**, S. 675, 1896, Phil. Mag. **44**, S. 329, 1897.
53) Simon, S. Ann. d. Phys. **69**, S. 589, 1899.
54) Siertsema, L. H. Akad. v. Wet. te Amsterdam **11**, S. 499, 1902.
55) Sommerfeld, A. Physik. Zeitschr. **1**, S. 105; **2**, S. 55, 1900. Zeitschr. f. Math. u. Phys. **46**, S. 11, 1901.
56) —. Gött. Nachr. 1904, S. 99, 363; 1905, S. 201.
57) Stettenheimer, A. Ann. d. Phys. **24**, S. 384, 1907.
58) Thomson, I. I. Phil. Mag. **11**, S. 229, 1881.
59) —. Phil. Mag. **46**, S. 528, 1898; **48**, S. 547, 1899; **5**, S. 346, 1903.
60) —. Phil. Mag. **44**, S. 293, 1897.
61) —. Phil. Mag. **45**, S. 172, 1898.
62) Townsend, I. S. Phil. Mag. **45**, S. 125, 1898. Phil. Trans. **193**, S. 129, 1899.
63) Trouton, F. T. u. Rankine, A. O. Lond. Roy. Soc. Proc. A. **80**, S. 420, 1908.
64) Voigt, W. Ann. d. Phys. **67**, S. 345, 1899. Magneto- und Elektrooptik, 1908.

65) Voigt, W. Ann. d. Phys. **9**, S. 115, 1902.
66) Wiechert, E. Gött. Nachr. 1898, S. 87, 260. Ann. d. Phys. **69**, S. 739, 1899.
67) —. Arch. néerland. **5** (Lorentz-Festschrift), S. 549, 1900.
68) Wien, W. Berl. Ber. 1893, S. 55, Ann. d. Phys. **52**, S. 132, 1894.
69) Wilson, H. A. Phil. Mag. **5**, S. 429, 1903.
70) —. Phil. Trans. A. **204**, S. 121, 1904.
71) Zeeman, P. Akad. v. Wet. te Amsterdam **5**, S. 181, 242, 1896. Phil. Mag. **43**, S. 226; **44**, S. 255, 1897.

Sachregister.



Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Encyklopädie der Elementar-Mathematik

Ein Handbuch

Dr. Heinrich Web

Professor

In drei Bä

I. Elementare Algebra und An 38 Textfiguren. [XVIII u. 5

II. Elemente der Geometrie. B **thal.** 2. Auflage. Mit 251

III. Angewandte Elementar-Ma und **R. H. Weber** (Rostock). Mi

Das Werk verfolgt das Ziel punkt zu stellen, von dem aus er kennen und zu erfassen und damit zu erhöhen. — Das Ziel dieser Arbei Mathematik zu ersehen oder in der sondern in einer strengen Begründun ist nicht sowohl für den Schüler selb jenen fundamentalen Betrachtungen geordnete Zusammenstellung der wic

. . . . Zwei Momente müsse leihen. Das eine liegt darin, daß die handlung erfahren, in einem Umfang treffen ist . . . Das zweite Momen darauf angelegt haben, eine pragm Sätzen, Konstruktionen und Rechnun war, an ausgewähltem Material die überall auf die Grundfragen einzugeh wiß oft und mit Nutzen zu Rate zieh tigen Fragen kommen, um sich über

Eines verdient noch besonder mit schönen, sehr instruktiv gezeichnet Formen sphärischer Dreiecke kommen und Study'schen Dreiecke sehr zustatt



É

Professor

Die Element

Deutsch

Profe

In 2 Bänden:

I. Band: Arithmetik und Algebra.

Mit 57 Fig. und 3 Tafeln. [XVI u. 431 S.] gr. 8. 1908. In Leinw. geb. n. ℳ 8.60.

II. Band: Geometrie und Trigonometrie. In Vorbereitung.

Die Vorschläge zu einer Reform des Unterrichtes in den Elementen der Mathematik, die neuerdings seitens der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte gemacht worden sind, hatten in Frankreich bereits seit 1900 in den offiziellen Lehrplänen Verwirklichung gefunden. Auf dieser mod ine vortrefflichen Lehrbücher aufgebaut, die in Frankreich w Es erschien daher angebracht, diese Elemente der Math rhältnissen angepaßten Bearbeitung dem deutschen Publikum